دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

مطالعهٔ تریدهای ۳-پایه

نگارش

بهاره اسفهبد میرحسین زاده سرابی

استاد راهنما

دکتر غلامرضا خسروشاهی

استاد مشاور

دکتر عبدالحسین هورفر

پایان نامه

برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

در ریاضی محض

مهر ۱۳۸۶

تقدیم به پدر و مادر مهربان

و همسر همیشه همراهم

چکیده

تریدها اشیایی ترکیبیاتی هستند که در شاخهٔ نظریهٔ طرح در ریاضیات مطرح می‌شوند. هر ترید N–پایه با پارامترهای t، k و v، یک خانواده از N خانوادهٔ دوبه‌دو مجزا از k–زیرمجموعه‌های مجموعهٔ v عضوی X است، به‌گونه‌ای که هر t–زیرمجموعه از X در همهٔ این N خانواده به تعداد برابر ظاهر شده است. در این صورت v اندازهٔ بنیان ترید نامیده می‌شود.

در این پایان‌نامه چهار بخش کلی در نظر گرفته شده است: تعریف جبری برای تریدهای N–پایه، رده‌بندی تریدهای ۳–پایهٔ ساده با اندازهٔ بنیان ۶ و ۷، یافتن حجم ترید ۳–پایهٔ سادهٔ ماکسیمال و پیاده‌سازی الگوریتمی برای رده‌بندی تمام تریدهای ۳–پایه با اندازهٔ بنیان ۸.

به ازای هر $t \leq k \leq v$ و $N \in \mathbb{N}$ دلخواه، به کمک ماتریس شمول $P^{v}_{t,k}$ و استفاده از معادلهٔ $P^{v}_{t,k} \times F = ۰$ روی حلقهٔ $\mathbb{Z}[\omega]$، که ω ریشهٔ N اُم اولیه است، نشان می‌دهیم که هر ترید N–پایه جوابی از معادلهٔ $P^{v}_{t,k} \times F = ۰$ است.

برای $k = ۳$ و $t = ۲$، حجم تریدهای ماکسیمال، در حالتی که $v \equiv ۲ \pmod{۹}$، برابر $\frac{v(v-۱)(v-۲)}{۱۸}$ است. همچنین اگر $v \equiv ۳ \pmod{۶}$، حجم تریدهای ماکسیمال برابر $\frac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۸}$ و اگر $v \equiv ۱, ۴ \pmod{۶}$، حجم تریدهای ماکسیمال برابر $\frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}$ است.

در بخشی دیگر نشان می‌دهیم با پارامترهای $k = ۳$ و $t = ۲$، تنها یک ترید ۳–پایه با اندازهٔ بنیان ۷ وجود دارد و حجم آن برابر ۶ است. این ترید کوچک‌ترین ترید ۳–پایه است. همچنین هیچ تریدی با اندازهٔ بنیان ۶ وجود ندارد.

در ادامه، با پیاده‌سازی و اجرای الگوریتمی برای یافتن تمام تریدهای ۳–پایه با $k = ۳$ و $t = ۲$ و اندازهٔ بنیان ۸ نشان می‌دهیم تنها ۷ ترید غیریکریخت با اندازهٔ بنیان ۸ موجود است، که از این تعداد، حجم یک ترید ۸، حجم یک ترید ۱۰ و حجم بقیه ۱۲ است.

کلمات کلیدی: ترید، ترید ساده، ترید N–پایه، ترید ۳–پایه، ترید ماکسیمال، ماتریس شمول.

قدردانی

با تشکر فراوان از استاد گرامی دکتر غلامرضا خسروشاهی، که با صبوری مسئولیت راهنمایی مرا در انجام این پروژه به عهده گرفتند. لازم می‌دانم از دکتر بهروز طایفه رضایی و دکتر عبدالحسین هورفر نیز بخاطر راهنمایی‌های سودمندِشان در زمان انجام این تحقیقات تشکر کنم.

همچنین جا دارد از پدر و مادر مهربان و خواهر عزیزم که در تمام دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبانم بوده‌اند و هیچ‌گاه مهربانی‌شان را از من دریغ نداشته‌اند، تشکر کنم.

تایپ و آماده‌سازی این پایان‌نامه ممکن نبود مگر با راهنمایی و کمک‌های برادرانم، آقایان بهداد و بهنام اسفهبد، که با فعالیت‌هایشان در زمینهٔ فارسی‌تک به من و همهٔ کاربران این نرم‌افزار کمک بسیار می‌کنند. از این عزیزان نیز متشکرم.

و تشکر ویژه دارم از آقای مهدی قاسمی، همراهی که قدم به قدم در تمام مراحل انجام این پروژه در کنارم بوده‌اند و علاوه بر همهٔ زحماتی که در مراحل آماده‌سازی این پایان‌نامه کشیده‌اند، بحث‌ها و نظرات علمی‌شان نیز در بهتر شدن کیفیت پایان‌نامهٔ حاضر بسیار مؤثر بوده است.

فهرست مندرجات

لیست جداول

مقدمه

در این پایان‌نامه سعی داریم شیی‌ای ترکیبیاتی به نام ترید را مورد بررسی قرار دهیم. تریدها، اشیایی ترکیبیاتی هستند که در اوایل دههٔ ۱۹۷۰، در مطالعهٔ t–طرح‌ها مورد توجه قرار گرفتند. در طی چند دههٔ گذشته، پژوهشگرانِ نظریهٔ طرح‌ها خواص کاربردی جالبی برای تریدها یافته‌اند. از این میان، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) ساختن t–طرح‌های علامت‌دار؛

۲) ساختن t–طرح‌های غیر یکریخت؛

۳) ساختن t–طرح‌هایی با بلوک‌های تکراری؛

۴) تعیین مجموعهٔ معرف برای بعضی از t–طرح‌ها؛

۵) تعیین بعضی از t–طرح‌های غیر یکریخت.

آنچه پیش از این در مورد تریدها مطرح شده است، در اغلب موارد پیرامون تریدهایی با دو پایه بوده است، که از این پس آن را ترید معمولی می‌نامیم. منابع کمی [3] موجود است که در آنها، تریدهایی با بیش از دو پایه مطرح یا بررسی شده باشند. محور اصلی دراین پایان‌نامه، بررسی تریدهایی با سه پایه است، اگر چه فصلی پیرامون تعریف جبری تریدهای N–پایه نیز در آن گنجانده شده است.

در حالت کلی برای $t \leq k \leq v$، یک ترید N-پایه، از N خانوادهٔ دو به دو مجزای $\{T_1, \ldots, T_N\}$ تشکیل شده است، که هر T_i، خانواده‌ای از k-زیرمجموعه‌های مجموعهٔ v عضوی X (که آنها را بلوک می نامیم) است، با این شرط که هر t-زیرمجموعهٔ X، در همهٔ T_i ها به تعدادی مساوی ظاهر شده باشد و می‌گوییم ترید ساده است اگر بلوک تکراری نداشته باشد.

همچنین تعریفی جبری برای تریدهای معمولی وجود دارد. اگر $P^v_{t,k}$ ماتریس $\binom{v}{t} \times \binom{v}{k}$ باشد که سطرهای آن متناظر با t تایی‌ها و ستون‌های آن متناظر با k تایی‌هایی از X باشند، آنگاه درایهٔ p_{AB} از ماتریس را برابر ۱ قرار می‌دهیم اگر t تایی متناظر با سطر A، زیرمجموعه‌ای از k تایی متناظر با ستون B باشد؛ در غیر اینصورت درایه را برابر ۰ قرار می‌دهیم. آنگاه هر جواب معادلهٔ $P^v_{t,k} \times F = 0$ یک ترید خواهد بود و اگر درایه‌های F از $\{-1, 0, 1\}$ باشند، آنگاه ترید ساده است. در فصلی که به این موضوع اختصاص داده شده است، این تعریف را تعمیم داده و تعریفی جبری برای تریدهای N-پایه ارائه کرده‌ایم. به اینصورت که اگر ω ریشهٔ N اُم اولیه باشد، آنگاه معادلهٔ $P^v_{t,k} \times F = 0$ را روی حلقهٔ $\mathbb{Z}[\omega] = \frac{\mathbb{Z}[x]}{<1-x^N>}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت درایه‌های F، چندجمله‌ای‌هایی از $\mathbb{Z}[\omega]$ خواهند بود. در این حالت نیز، ترید F ساده است، هرگاه هر درایهٔ آن تک‌جمله‌ای با ضریب $+1$ باشد.

گذشته از این فصل، که در آن کلیهٔ تریدهای N-پایه، برای هر $t \leq k \leq v$ بررسی شده است، در سایر فصل‌های پایان‌نامه، تریدهایی N-پایه با $k = 3$ و $t = 2$ مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. به گونه‌ای که در فصل (۲)، به کمک روش‌های ساختنی نشان می‌دهیم که هیچ یک از تریدهای معمولی با اندازهٔ بنیان ۶ (که در [9] به طور کامل مشخص شده‌اند)، قابل گسترش به یک ترید ۳-پایه نیستند و لذا هیچ ترید ۳-پایه با اندازهٔ بنیان ۶ وجود ندارد. همچنین نشان می‌دهیم که تنها یکی از تریدهای معمولی با اندازهٔ بنیان ۷ (لیست کامل این تریدها در [9] آمده است)، قابل گسترش به ترید ۳-پایه است و حجم این ترید برابر ۶ است.

در فصلی دیگر (که به نظر نگارنده، از نظر زمان اجرا و نیز اطلاعات حاصله، مهم‌ترین فصل از این پایان نامه است)، از تعریف جبری تریدهای معمولی استفاده کرده، الگوریتمی برای پیدا

کردن تمام تریدهای معمولی با اندازهٔ بنیان ۸، که احتمال گسترش آنها به یک ترید ۳-پایه وجود دارد، پیدا می‌کنیم. سپس این الگوریتم را توسعه داده، الگوریتمی برای یافتن کلیهٔ تریدهای ۳-پایه با اندازهٔ بنیان ۸ طراحی کرده و در نهایت، با استفاده از برنامهٔ کامپیوتری بر مبنای این الگوریتم، تمام تریدهای ۳-پایهٔ سادهٔ غیریکریخت را به دست می‌آوریم. نتایج حاصل نشان می‌دهد که تعداد تریدهای غیریکریخت با اندازهٔ بنیان ۸، ۷ تاست، که از این بین، یک ترید حجم ۸ و یک ترید حجم ۱۰ دارند و ۵ ترید غیریکریخت باقیمانده، حجم ۱۲ دارند.

به عنوان بخشی دیگر از تحقیقات، سعی شده است تا حجم تریدهای ۳-پایهٔ سادهٔ ماکسیمال محاسبه شود. البته مقدار این کمیت به ازای تمام مقادیر v مشخص نشده است، اما اگر $v \equiv 1 \pmod 6$ و $v > 7$، آنگاه حجم تریدهای ماکسیمال برابر $\frac{v(v-1)(v-4)}{18}$ و اگر $v \equiv 3 \pmod 6$ و $v > 3$، حجم تریدهای ماکسیمال برابر $\frac{v(v-1)(v-3)}{18}$ و اگر $v \equiv 4 \pmod 6$ و $v > 4$، حجم تریدهای ماکسیمال برابر $\frac{v(v-1)(v-4)}{18}$ است. همچنین اگر $v \equiv 2 \pmod 9$ و $v > 2$، حجم تریدهای ماکسیمال برابر $\frac{v(v-1)(v-2)}{18}$ است.

فصل ۱

تعاریف و پیشنیازها

لازم است پیش از آنکه مطالب اصلی را آغاز کنیم، برخی از تعاریف و مفاهیم نظریهٔ طرح‌ها را، که نقش عمده‌ای در درک مطالب دارند، یادآور شویم.

۱.۱ تعاریف

۱.۱-۱ طرح‌ها

فرض کنید v، k، t و λ اعداد صحیح مثبت باشند، به طوری که $t \leq k \leq v$. اگر X یک مجموعهٔ v عضوی باشد، برای هر $0 \leq i \leq v$، مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های i عضوی X را با نماد $P_i(X)$ نمایش داده، هر عضو از $P_i(X)$، مانند $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ را به صورت $x_1 x_2 \cdots x_i$ نیز نشان می‌دهیم. اعضای $P_k(X)$ را **بلوک** می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱ ساختار $D = (X, \mathcal{B})$ را که در آن $\mathcal{B}$ یک خانواده از اعضای $P_k(X)$ است، یک t-(v,k,λ) **طرح**، یا به طور خلاصه یک t-**طرح**، می‌نامیم هرگاه هر عضو از $P_t(X)$ دقیقاً در λ بلوک از $\mathcal{B}$ ظاهر شده باشد. یک t-طرح با $\lambda = 1$، **سیستم اشتاینری** نامیده می‌شود.

مثال ۱.۱.۱ برای $v=۹$، $k=۳$، $t=۲$ و $\lambda=۱$، مجموعهٔ زیر یک $(۹,۳,۱)$–۲ طرح است و از آنجا که $\lambda=۱$، این طرح اشتاینری نیز هست، یعنی هر زوج از $X=\{۱,\ldots,۹\}$ تنها یک بار در آن ظاهر شده است.

$$\{۱۲۴, ۱۳۸, ۱۵۷, ۱۶۹, ۲۳۷, ۲۵۹, ۲۶۸, ۳۴۹, ۳۵۶, ۴۵۸, ۴۶۷, ۷۸۹\}. \vartriangle$$

$P_k(X)$، به ازای هر $۱ \leq t \leq k$، یک t–$(v,k,\binom{v-t}{k-t})$ طرح است که با $D_{tr}=(X,P_k(X))$ نمایش داده و **طرح بدیهی** یا **کامل** نامیده می‌شود. فرض کنید $D=(X,B)$ و $D'=(X',B')$ دو t–طرح با پارامترهای یکسان باشند و تناظر یک به یکی مانند $\varphi: X \to X'$ بین X و X' برقرار باشد. گوییم D و D' **یکریخت** هستند هرگاه $\varphi(B)=B'$.

تعریف ۲.۱.۱ [15] برای مجموعهٔ v عضوی X، یک **مجموعهٔ بزرگ** از t–(v,k,λ) طرح‌های دوبه‌دو مجزا، که آن را با $\mathrm{LS}_\lambda(t,k,v)$ نمایش می‌دهیم، یک افراز از مجموعهٔ $P_k(X)$ به t–(v,k,λ) طرح‌های ساده است. همچنین بیشترین تعداد t–(v,k,λ) طرح‌های دوبه‌دو مجزا روی X را با نماد $\mathrm{D}_\lambda(t,k,v)$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعریف ۲.۱.۱، $\mathrm{D}_\lambda(t,k,v) \leq \frac{\binom{v-t}{k-t}}{\lambda}$ و تساوی برقرار است، اگر و فقط اگر یک $\mathrm{LS}_\lambda(t,k,v)$ موجود باشد. همچنین اگر $\mathrm{LS}_\lambda(t,k,v)$ موجود باشد، تعداد طرح‌های دو به دو مجزای تشکیل دهندهٔ آن برابر $\frac{\binom{v-t}{k-t}}{\lambda}$ است. اگر به ازای هر $۰ \leq i \leq t$، قرار دهیم $\lambda_i=\lambda\binom{v-i}{t-i}/\binom{k-i}{t-i}$، آنگاه یک مجموعه از شرایط لازم برای وجود یک t–(v,k,λ) طرح این است که λ_i $(\forall\, i=۰,۱,\ldots,t)$ عددی صحیح باشد.

نکته: اگر در نمادها λ ظاهر نشود، به این معناست که $\lambda=۱$.

مثال ۲.۱.۱ برای $v=۵$، $k=۲$ و $t=۱$ داریم:

$$۰ \leq i \leq t: \quad \lambda_i=\lambda\frac{\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_۰=\lambda\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۲}{۱}}=\frac{۵}{۲}\lambda; \\ \lambda_۱=\lambda\frac{\binom{۴}{۰}}{\binom{۱}{۰}}=\lambda. \end{cases}$$

$\lambda_{۰}, \lambda_{۱}$ باید اعدادی صحیح باشند، بنابراین λ باید عددی زوج باشد. اگر فرض کنیم $\lambda = ۲$، آنگاه $D_{۱}$ و $D_{۲}$ یک مجموعهٔ بزرگ از $(۵, ۲, ۲)$-۱ طرح‌ها تشکیل می‌دهند:

$$D_{۱} = \{۱۲, ۱۳, ۲۵, ۳۴, ۴۵\},$$

$$D_{۲} = \{۱۴, ۱۵, ۲۳, ۲۴, ۳۵\}. \ \triangle$$

مثال ۳.۱.۱ برای $v = ۹$، $k = ۳$ و $t = ۲$، شرایط لازم برای وجود یک مجموعهٔ بزرگ از $(۹, ۳, \lambda)$-۲ طرح‌ها را می‌یابیم:

$$\lambda_{۰} = \lambda\frac{\binom{۹}{۲}}{\binom{۳}{۲}} = ۱۲\lambda, \quad \lambda_{۱} = \lambda\frac{\binom{۸}{۱}}{\binom{۲}{۱}} = ۴\lambda, \quad \lambda_{۲} = \lambda\frac{\binom{۷}{۰}}{\binom{۱}{۰}} = \lambda.$$

با توجه به شرایط لازم، λ، ۴λ و ۱۲λ باید اعدادی صحیح باشند، یعنی λ هر عدد طبیعی می‌تواند باشد. اگر فرض کنیم $\lambda = ۱$، آنگاه تعداد طرح‌های مجموعهٔ بزرگ برابر $\frac{\binom{۹-۲}{۳-۲}}{۱} = ۷$ است، یعنی $D_{۱}, \ldots, D_{۷}$ یک مجموعهٔ بزرگ از $(۹, ۳, ۱)$-۲ طرح‌ها تشکیل می‌دهند. توجه کنید که طرح ارائه شده در مثال ۱.۱.۱ یک $(۹, ۳, ۱)$-۲ طرح اشتاینری بود. مجموعهٔ بزرگی که برای $v = ۹$، $k = ۳$، $t = ۲$ و $\lambda = ۱$ در زیر آمده است، به گونه‌ای است که طرح مثال ۱.۱.۱ یکی از طرح‌های آن است:

$$D_{۱} = \{۱۲۴, ۱۳۸, ۱۵۷, ۱۶۹, ۲۳۷, ۲۵۹, ۲۶۸, ۳۴۹, ۳۵۶, ۴۵۸, ۴۶۷, ۷۸۹\},$$

$$D_{۲} = \{۱۲۹, ۱۳۶, ۱۴۵, ۱۷۸, ۲۳۵, ۲۴۸, ۲۶۷, ۳۴۷, ۳۸۹, ۴۶۹, ۵۶۸, ۵۷۹\},$$

$$D_{۳} = \{۱۲۳, ۱۴۸, ۱۵۹, ۱۶۷, ۲۴۹, ۲۵۶, ۲۷۸, ۳۴۶, ۳۵۸, ۳۷۹, ۴۵۷, ۶۸۹\},$$

$$D_{۴} = \{۱۲۶, ۱۳۵, ۱۴۷, ۱۸۹, ۲۳۴, ۲۵۸, ۲۷۹, ۳۶۹, ۳۷۸, ۴۵۹, ۴۶۸, ۵۶۷\},$$

$$D_{۵} = \{۱۲۸, ۱۳۷, ۱۴۹, ۱۵۶, ۲۳۹, ۲۴۶, ۲۵۷, ۳۴۵, ۳۶۸, ۴۷۸, ۵۸۹, ۶۷۹\},$$

$$D_{۶} = \{۱۲۵, ۱۳۴, ۱۶۸, ۱۷۹, ۲۳۸, ۲۴۷, ۲۶۹, ۳۵۹, ۳۶۷, ۴۵۶, ۴۸۹, ۵۷۸\},$$

$$D_{۷} = \{۱۲۷, ۱۳۹, ۱۴۶, ۱۵۸, ۲۳۶, ۲۴۵, ۲۸۹, ۳۴۸, ۳۵۷, ۴۷۹, ۵۶۹, ۶۷۸\}. \ \triangle$$

۲-۱.۱ تریدهای معمولی

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید v، k و t اعداد صحیح مثبت باشند به گونه‌ای که $t \leq k \leq v$. اگر X یک مجموعهٔ v عضوی باشد و $T_۱$ و $T_۲$ دو خانوادهٔ جدا از هم از اعضای $P_k(X)$ باشند، به گونه‌ای که تعداد رخدادهای هر یک از اعضای $P_t(X)$ در $T_۱$ و $T_۲$ برابر باشد، آنگاه $T = \{T_۱, T_۲\}$ یک $\mathrm{T}(t, k, v)$ **ترید** نامیده می‌شود[۱] و $T_۱$ و $T_۲$ را **پایه‌های** ترید T می‌نامیم.

با توجه به تعریف ترید، واضح است که $|T_۱| = |T_۲|$. $|T_۱|$ را **حجم** ترید T نامیده و آن را با $\mathrm{vol}(T)$ نمایش می‌دهیم. زیرمجموعه‌ای از X را که در بلوک‌های $T_۱$ (و البته در بلوک‌های $T_۲$) ظاهر می‌شود، **بنیان** T می‌نامیم و با $\mathrm{found}(T)$ نمایش می‌دهیم. $|\mathrm{found}(T)|$ را **اندازهٔ بنیان** T می‌نامیم.

نکته ۱ در برخی منابع، پارامترهای t, k در ترید T به ترتیب **طول** و **قوهٔ** ترید نامیده شده‌اند.

نکته ۲ اگر $۰ < t' \leq t \leq k \leq v \leq v'$، آنگاه هر $\mathrm{T}(t, k, v)$ ترید، یک $\mathrm{T}(t', k, v)$ ترید و نیز یک $\mathrm{T}(t, k, v')$ ترید است.

نکته ۳ تکرار بلوک‌ها در T_i مجاز است، همچنین نیاز نیست که هر عضو از $P_t(X)$ لزوماً در ترید ظاهر شده باشد.

مثال ۴.۱.۱ $X = \{۱, \ldots, ۷\}$ و $v = ۷$، $k = ۴$ و $t = ۲$. قرار می‌دهیم:

$$T_۱ = \{۱۳۵۷, ۱۴۶۷, ۲۳۶۷, ۲۴۵۷\},$$
$$T_۲ = \{۱۳۶۷, ۱۴۵۷, ۲۳۵۷, ۲۴۶۷\}.$$

آنگاه $T = \{T_۱, T_۲\}$ یک $\mathrm{T}(۲, ۴, ۷)$ ترید است و داریم:

$$\mathrm{vol}(T) = |T_۱| = |T_۲| = ۴, \quad \mathrm{found}(T) = \{۱, \ldots, ۷\}, \quad |\mathrm{found}(T)| = ۷.$$

---

[۱] در برخی از مراجع، تریدی با پارامترهای v، k و t را با نماد $t\text{–}(v, k)$ نمایش می‌دهند.

با توجه به تعریف ترید، می‌توان گفت که ترید T یک $\mathrm{T}(۲,۴,۸)$ ترید نیز هست، همچنین یک $\mathrm{T}(۲,۴,۱۰)$ ترید. به عبارت دیگر برای هر $v > ۷$، T یک $\mathrm{T}(۲,۴,v)$ ترید نیز هست. البته در این حالت‌ها $\mathrm{vol}(T)$ و $\mathrm{found}(T)$ همواره ثابت است. یعنی اگر T را به عنوان یک $\mathrm{T}(۲,۳,۱۰)$ ترید در نظر بگیریم، همچنان داریم:

$$\mathrm{vol}(T) = ۴, \quad \mathrm{found}(T) = \{۱,\ldots,۷\}, \quad |\mathrm{found}(T)| = ۷. \vartriangle$$

ترید $T = \{T_۱, T_۲\}$ با حجم $\mathrm{vol}(T) = s$ را به فرم $T = T_۱ - T_۲ = \Sigma_{i=۱}^{s} B_{۱i} - \Sigma_{i=۱}^{s} B_{۲i}$ نیز نشان می‌دهیم، که در آن $B_{۱i}$ ها و $B_{۲i}$ ها، به ترتیب بلوک‌های موجود در $T_۱$ و $T_۲$ هستند.

محمل ترید T، مجموعه‌ی تمام بلوک‌های متمایز از ترید است، که با $\mathrm{supp}(T)$ نشان داده می‌شود. تعداد اعضای محمل، **اندازهٔ محمل** ترید نامیده می‌شود.

مثال ۵.۱.۱ با نمایش فوق، ترید مثال ۴.۱.۱ به صورت زیر خواهد بود:

$$T = T_۱ - T_۲ = ۱۳۵۷ + ۱۴۶۷ + ۲۳۶۷ + ۲۴۵۷ - ۱۳۶۷ - ۱۴۵۷ - ۲۳۵۷ - ۲۴۶۷.$$

همچنین $\mathrm{supp}(T)$ برابر است با:

$$\mathrm{supp}(T) = \{۱۳۵۷, ۱۴۶۷, ۲۳۶۷, ۲۴۵۷, ۱۳۶۷, ۱۴۵۷, ۲۳۵۷, ۲۴۶۷\},$$

و $|\mathrm{supp}(T)| = ۸ = ۲ \times \mathrm{vol}(T)$.$\vartriangle$

ترید T را **ساده** می‌نامیم هرگاه بلوک تکراری نداشته باشد ($|\mathrm{supp}(T)| = ۲ \times \mathrm{vol}(T)$). ترید را **پوچ** می‌نامیم هرگاه $\mathrm{vol}(T) = ۰$. ترید $T = \{T_۱, T_۲\}$ یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ **ترید اشتاینری** نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو از $P_t(X)$ حداکثر یک‌بار در $T_۱$ (و به طور مشابه در $T_۲$) ظاهر شده باشد.

نکته بدیهی است اگر ترید ساده نباشد، اشتاینری نیز نخواهد بود.

تریدهای $T = \{T_۱, T_۲\}$ و $T' = \{T'_۱, T'_۲\}$ **یکریخت** نامیده می‌شوند اگر تناظر یک به یکی مانند $\sigma : \mathrm{found}(T) \to \mathrm{found}(T')$ وجود داشته باشد، به گونه‌ای که

$$\sigma(T) = \{\sigma(T_۱), \sigma(T_۲)\} = \{T'_۱, T'_۲\} = T'.$$

اگر D یک خانواده از بلوک‌ها باشد و $(x_۱ \cdots x_i)$ یک عضو از $P_i(X)$، $۰ < i < k$ و $x \in X$ باشد، آنگاه تعداد بلوک‌هایی از D که شامل $(x_۱ \cdots x_i)$ هستند را با $\lambda_{D(x_۱ \cdots x_i)}$ و تعداد بلوک‌هایی از D که شامل x هستند را با r_{Dx} نشان می‌دهیم. برای جلوگیری از به کارگیری علائم اضافه، در جایی که D مشخص است، از $\lambda_{(x_۱ \cdots x_i)}$ به جای $\lambda_{D(x_۱ \cdots x_i)}$ و از r_x به جای r_{Dx} استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۱ در $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید T، برای هر نقطهٔ $x \in \mathrm{found}(T)$، مجموعهٔ تمام بلوک‌های شامل x از T را در نظر می‌گیریم. با حذف x از این بلوک‌ها، یک $\mathrm{T}(t-۱, k-۱, v-۱)$ ترید به دست می‌آید که آن را **ترید مشتق** نسبت به x می‌نامیم و با $\partial_x T$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۶.۱.۱ مجدداً ترید مثال ۴.۱.۱ را در نظر بگیرید. دیدیم که $|\mathrm{supp}(T)| = ۲ \times \mathrm{vol}(T)$ و لذا T تریدی ساده است. با کمی دقت می‌توان دید T اشتاینری نیز هست. ترید $T' = \{T'_۱, T'_۲\}$ را در نظر بگیرید:

$$T'_۱ = \{۱۲۳۵, ۱۲۴۶, ۲۳۶۷, ۲۴۵۷\},$$
$$T'_۲ = \{۱۲۳۶, ۱۲۴۵, ۲۳۵۷, ۲۴۶۷\}.$$

اگر تعریف کنیم $\sigma = (۲۷)$، آنگاه $\sigma(T) = T'$. بنابراین T و T' یکریخت هستند. ترید مشتق T نسبت به $x = ۱$ به صورت $\partial_۱ T = ۳۵۷ + ۴۶۷ - ۳۶۷ - ۴۵۷$ است. $\partial_۱ T$ یک $\mathrm{T}(۱,۲,۷)$ ترید است. در واقع $\partial_۱ T$ یک $\mathrm{T}(۱,۲,۵)$ ترید است. $\triangle$

لم ۱.۱.۱ [7] فرض کنید T یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید با حجم s و X مجموعه‌ای v عضوی باشد. برای هر $x \in \mathrm{found}(T)$، تابع α_x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_x : P_k(X) \to \{۰, ۱\}$$
$$\alpha_x(B) = \begin{cases} ۰, & x \notin B; \\ ۱, & x \in B. \end{cases}$$

حال فرض کنید $x \in \mathrm{found}(T)$ به گونه‌ای باشد که $r_x < s$ $(r_x = r_{T_۱x} = r_{T_۲x})$. قرار می‌دهیم:

$$T_{1x} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_x(B_{1i})B_{1i}, \quad T'_{1x} = \sum_{i=1}^{s}(1 - \alpha_x(B_{1i}))B_{1i},$$
$$T_{2x} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_x(B_{2i})B_{2i}, \quad T'_{2x} = \sum_{i=1}^{s}(1 - \alpha_x(B_{2i}))B_{2i}.$$

در این صورت:

۱) $T_x = T_{1x} - T_{2x}$ یک $\mathrm{T}(t-1,k,v)$ ترید با حجم r_x است.

۲) $T'_x = T'_{1x} - T'_{2x}$ یک $\mathrm{T}(t-1,k,v)$ ترید با حجم $s - r_x$ است.

اثبات. می‌توان T_1 و T_2 را به فرم زیر نمایش داد:

$$T_1 = \overbrace{\{x\_\_\_, x\_\_\_, \ldots, x\_\_\_\}}^{T_{1x}} \cup T'_{1x},$$
$$T_2 = \overbrace{\{x\_\_\_, x\_\_\_, \ldots, x\_\_\_\}}^{T_{2x}} \cup T'_{2x}.$$

T_{1x} و T_{2x} مجموعهٔ همهٔ بلوک‌های شامل x و T'_{1x} و T'_{2x} مجموعهٔ همهٔ بلوک‌های فاقد x هستند. بنابراین به ازای هر عضو از $P_{t-1}(X)$ مانند $y_1 \ldots y_{t-1}$ داریم:

$$\lambda_{T_{1x}(y_1 \ldots y_{t-1})} = \lambda_{T_{1x}(xy_1 \ldots y_{t-1})} = \lambda_{T_1(xy_1 \ldots y_{t-1})},$$

$$\lambda_{T_{2x}(y_1 \ldots y_{t-1})} = \lambda_{T_{2x}(xy_1 \ldots y_{t-1})} = \lambda_{T_2(xy_1 \ldots y_{t-1})}.$$

از آنجا که T یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید است، لذا

$$\lambda_{T_1(xy_1 \ldots y_{t-1})} = \lambda_{T_2(xy_1 \ldots y_{t-1})} \Rightarrow \lambda_{T_{1x}(y_1 \ldots y_{t-1})} = \lambda_{T_{2x}(y_1 \ldots y_{t-1})}.$$

بنابراین $T_x = T_{1x} - T_{2x}$ یک $\mathrm{T}(t-1,k,v)$ ترید با حجم r_x است. از آنجاکه T و T_x هر دو $\mathrm{T}(t-1,k,v)$ ترید هستند، لذا $T'_x = T - T_x$ نیز یک $\mathrm{T}(t-1,k,v)$ ترید با حجم $s - r_x$ است.■

قضیهٔ ۱.۱.۱ [7]

۱) حداقل اندازهٔ بنیان برای یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید غیرپوچ، $k + t + 1$ است و بنابراین هیچ ترید غیرپوچ با $v \leq k + t$ وجود ندارد.

۲) برای $v \geq k+t+1$، حداقل حجم یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید غیرپوچ 2^t است.

۳) $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید غیرپوچ با اندازهٔ بنیان $k+t+1$ و حجم 2^t موجود بوده، **ترید مینیمال** نامیده می‌شود و با تقریب یکریختی، یکتاست.

۴) برای $v \geq k+t+1$، هر $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید ترکیبی صحیح از $\mathrm{T}(t,k,v)$ تریدهای مینیمال است.

۵) برای هر v، k و t، $t \geq 2$، هیچ $\mathrm{T}(t,k,v)$ تریدی با حجم 2^t+1 وجود ندارد.

اثبات.

۱) قرار می‌دهیم $W = \mathrm{found}(T)$ ومنظورمان از $W-B$، مجموعه‌ای $|W|-|B|$ عضوی از عناصر W است که شامل بلوک B نیست. همچنین قرار می‌دهیم $\overline{T} = \overline{T_1} - \overline{T_2}$ که در آن $\overline{T_1} = \sum_i (W-B_{1i})$ و $\overline{T_2} = \sum_i (W-B_{2i})$. از آنجاکه T یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید است، لذا برای هر $x_1 \ldots x_i \in P_i(X)$ $(0 \leq i \leq t)$، $x_1 \ldots x_i$ در تعدادی مساوی از بلوک‌های T_1 و T_2 آمده است و در نتیجه در تعدادی مساوی از بلوک‌های T_1 و T_2 نیامده است ($|T_1| = |T_2|$). بنابراین $x_1 \ldots x_i$ در $\overline{T_1}$ و $\overline{T_2}$ به تعدادی مساوی ظاهر شده است، پس $\overline{T}$ یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید است که طول بلوک‌های آن $|W|-k$ است. حال اگر $|W| \leq k+t$، آنگاه $|W|-k \leq t$، یعنی طول بلوک‌های $\overline{T}$، کمتر یا مساوی t است و از آنجا که $\overline{T}$ یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید است، به ناچار $\overline{T_1} = \overline{T_2}$ که با تعریف ترید ساده متناقض است. بنابراین $t+1 \leq |W|-k$ و از آنجا نتیجه می‌شود $k+t+1 \leq |\mathrm{found}(T)|$.

۲) حکم را با استقرا روی t ثابت می‌کنیم. برای $t=1$، بدیهی است که حجم هر $\mathrm{T}(1,k,v)$ ترید T حداقل 2^1 است (زیرا در غیر این صورت $T_1 = T_2$ که متناقض با تعریف ترید است). بنابراین فرض می‌کنیم $t > 1$ و حجم هر $\mathrm{T}(t-1,k,v)$ ترید حداقل برابر 2^{t-1} باشد. $x \in \mathrm{found}(T)$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $r_x \neq \mathrm{vol}(T)$. در این صورت طبق

لم ۱.۱.۱، T_x و T'_x، $\mathrm{T}(t-1,k,v)$ ترید هستند و حجم آنها حداقل 2^{t-1} است. بنابراین $2^t = 2^{t-1} + 2^{t-1} \leq \mathrm{vol}(T_x) + \mathrm{vol}(T'_x) = \mathrm{vol}(T)$.

برای اثبات قسمت‌های **(۳، ۴ و ۵)** به [7] مراجعه شود. ■

نکته: [4,6] هر $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید مینیمال را می‌توان با یک چندجمله‌ای به شکل زیر نمایش داد:

$$\phi(x_1,\ldots,x_v) = (x_{b_1} - x_{c_1})(x_{b_2} - x_{c_2})\cdots(x_{b_{t+1}} - x_{c_{t+1}})x_{b_{t+2}}\cdots x_{b_k},$$

که در آن تمام b_i ها و c_i ها متمایز هستند. پس از ضرب کردن فاکتورهای فوق و جایگزینی x_i با i، حاصل یک ترید مینیمال است. $x_{b_{t+2}}\cdots x_{b_k}$ **دُمِ ترید** مینیمال نامیده می‌شود.

حکم کلی‌تر دربارهٔ تریدها در قضیهٔ زیر (**گراور-یورکات**[2]) آمده است:

قضیهٔ ۲.۱.۱ [4] $\mathbb{Z}$-مدول $\mathrm{T}(t,k,v)$ تریدها به وسیلهٔ مجموعهٔ $\{\phi^\sigma : \sigma \in S_v\}$ تولید می‌شود، که در آن

$$\phi^\sigma(x_1,\ldots,x_v) = (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)})\cdots(x_{\sigma(2t+1)} - x_{\sigma(2t+2)})x_{\sigma(2t+3)}\cdots x_{\sigma(k+t+1)}.$$

همچنین مجموعهٔ مولد تهی است هرگاه $v \leq k+t$ یا $k \leq t$.

مجموعهٔ $\{\phi^\sigma : \sigma \in S_v\}$ در قضیهٔ ۲.۱.۱، یک مولد مدول تریدها است. اما اگر $\sigma \in S_v$ ها به گونه‌ای انتخاب شوند که شرایط زیر را داشته باشند، آنگاه یک پایه برای فضای تریدها به دست می‌آید، که این پایه زیرمجموعهٔ سره‌ای از مجموعهٔ $\{\phi^\sigma : \sigma \in S_v\}$ است.

۱) $(\sigma(2i-1) < \sigma(2i))\ \ \forall\ 1 \leq i \leq t+1$،

۲) $\sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2t+1)$،

۳) $\sigma(2t+3) < \cdots < \sigma(k+t+1)$.

---
[2] Graver-Jurkat

خسروشاهی [3] و دیگران [11]، تریدی با حجم $\mathrm{vol}(T) = ۲^t$ را **ترید پایه‌ای** نامیدند. بنابراین هر ترید مینیمال، یک ترید پایه‌ای است.

قضیهٔ ۱.۱.۳ [11] اگر $\pi_j(i)$، تعداد حالت‌های ممکن برای نوشتن عدد i به صورت j جمعوند مثبت باشد، آنگاه تعداد تریدهای پایه‌ای غیریکریخت برابر است با

$$\sum_{l=۰}^{k-t-۱} \pi_{t+۱}(k-l).$$

مثال ۱.۱.۷

۱) اگر $X = \{۱, \ldots, ۶\}$، آنگاه $T = \{T_۱, T_۲\}$ یک $\mathrm{T}(۲, ۳, ۶)$ ترید سادهٔ اشتاینری است:

$$T_۱ = \{۱۲۳, ۱۵۶, ۲۴۶, ۳۴۵\}, \quad T_۲\{۱۲۶, ۱۳۵, ۲۳۴, ۴۵۶\}.$$

همچنین $\mathrm{vol}(T) = ۲^۲$ و $|\mathrm{found}(T)| = ۲ + ۳ + ۱$. لذا T یک ترید مینیمال است که چندجمله‌ای متناظر با آن به صورت زیر است:

$$\phi(x_۱, \ldots, x_۶) = (x_۱ - x_۴)(x_۲ - x_۵)(x_۳ - x_۶).$$

۲) اگر $X = \{۱, \ldots, ۶\}$، آنگاه $T = \{T_۱, T_۲\}$ یک $\mathrm{T}(۱, ۳, ۶)$ ترید پایه‌ای غیرمینیمال است:

$$T_۱ = \{۱۲۳, ۴۵۶\}, \quad T_۲ = \{۱۲۴, ۳۵۶\}.$$

۳) اگر $X = \{۱, \ldots, ۵\}$، آنگاه $T = \{T_۱, T_۲\}$ یک $\mathrm{T}(۱, ۲, ۵)$ ترید غیرساده است:

$$T_۱ = \{۱۲, ۱۲, ۳۵, ۴۵\}, \quad T_۲ = \{۱۳, ۱۴, ۲۵, ۲۵\}.$$

۴) اگر $X = \{۱, \ldots, ۵\}$، آنگاه $T = \{T_۱, T_۲\}$ یک $\mathrm{T}(۱, ۲, ۵)$ ترید ساده غیراشتاینری است:

$$T_۱ = \{۱۲, ۱۴, ۳۵\}, \quad T_۲ = \{۱۳, ۱۵, ۲۴\}.$$

[3] Khosrovshahi

۳-۱.۱ تریدهای N-پایه

تعریف ۵.۱.۱ یک **ترید N-پایه** ، که آن را با $\mathrm{T}[N](t,k,v)$ نشان می‌دهیم، یک خانواده از مجموعه‌های دو به دو مجزا به صورت $T=\{T_۱,T_۲,\ldots,T_N\}$ است، به گونه‌ای که برای هر i,j که $i\neq j$، $\{T_i,T_j\}$ یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید باشد.

مفاهیم حجم، بنیان، اندازهٔ بنیان و محمل، برای تریدهای N-پایه، مشابه تریدهای معمولی تعریف می‌شوند:

حجم ترید N-پایهٔ T ، که آن را با $\mathrm{vol}(T)$ نشان می دهیم، برابر تعداد بلوک‌های موجود در $T_۱$ (یا برای هر $N \leq i \leq ۲$، T_i) است، یعنی $\mathrm{vol}(T)=|T_۱|=\cdots=|T_N|$. **بنیان** ترید N-پایهٔ T، که آن را با $\mathrm{found}(T)$ نشان می‌دهیم، مجموعهٔ اعضایی از X است که در بلوک‌های T ظاهر شده‌اند و **اندازهٔ بنیان** ترید T، $|\mathrm{found}(T)|$، برابر تعداد این اعضا است. **محمل** ترید N-پایهٔ T، مجموعهٔ بلوک‌های دو به دو متمایز به کار رفته در T است، یعنی $\mathrm{supp}(T)=T_۱\cup\ldots\cup T_N$. ترید N-پایهٔ T **ساده** است هرگاه هیچ بلوک تکراری نداشته باشد و **اشتاینری** است هرگاه هر عضو از $P_t(X)$ حداکثر یک‌بار در هر T_i ظاهر شده باشد. برای $\mathrm{T}[N](t,v,k)$ ترید T، **مشتق** T نسبت به x، $\partial_x T$، یک $\mathrm{T}[N](t-۱,k-۱,v-۱)$ ترید است که ستون‌های آن به این روش بدست می‌آیند که از هر ستون T، بلوک‌هایی را که شامل x هستند انتخاب کرده، x را از آنها حذف می‌کنیم و آنچه می‌ماند، به عنوان یک ستون از $\partial_x T$ در نظر می‌گیریم. همچنین $\mathrm{T}[N_۱](t,k,v)$ ترید $T=\{T_۱,\ldots,T_{N_۱}\}$ و $\mathrm{T}[N_۲](t,k,v)$ ترید $T'=\{T'_۱,\ldots,T'_{N_۲}\}$ را **یکریخت** گوییم هرگاه:

۱) $\mathrm{vol}(T)=\mathrm{vol}(T')$،

۲) $|\mathrm{found}(T)|=|\mathrm{found}(T')|$،

۳) $N_۱=N_۲$،

۴) تابع $f:\mathrm{found}(T)\to\mathrm{found}(T')$ موجود باشد به گونه‌ای که $f(T)=T'$.

از آنجا که هر دو ستون از یک ترید N–پایه، تشکیل یک ترید معمولی می‌دهند، بنابراین هر دو قسمت (۱) و (۲) از قضیهٔ ۱.۱.۱ در مورد اندازهٔ بنیان و حجم تریدهای N–پایه برقرار است، یعنی برای هر $\mathrm{T}[N](t,k,v)$ ترید T داریم:

$$k+t+۱ \leq |\mathrm{found}(T)|, \quad ۲^t \leq \mathrm{vol}(T),$$

با این تفاوت که تساوی لزوماً برقرار نیست .

مثال ۸.۱.۱ اگر $T=\{T_۱,T_۲,T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۳,۴,۸)$ ترید سادهٔ اشتاینری با $\mathrm{vol}(T)=۱۲$ و $|\mathrm{found}(T)|=۸$ روی $X=\{۱,\ldots,۸\}$ باشد،

$$\begin{aligned} T_۱ = \; & \{۱۲۳۷, ۱۲۴۸, ۱۳۴۵, ۱۳۶۸, ۱۴۶۷, ۱۵۷۸, ۲۳۴۶, ۲۳۵۸, ۲۴۵۷, ۲۶۷۸,\\ & ۳۵۶۷, ۴۵۶۸\},\\ T_۲ = \; & \{۱۲۳۸, ۱۲۴۷, ۱۳۴۶, ۱۳۵۷, ۱۴۵۸, ۱۶۷۸, ۲۳۴۵, ۲۳۶۷, ۲۴۶۸, ۲۵۷۸,\\ & ۳۵۶۸, ۴۵۶۷\},\\ T_۳ = \; & \{۱۲۳۴, ۱۲۷۸, ۱۳۵۸, ۱۳۶۷, ۱۴۵۷, ۱۴۶۸, ۲۳۵۷, ۲۳۶۸, ۲۴۵۸, ۲۴۶۷,\\ & ۳۴۵۶, ۵۶۷۸\}. \end{aligned}$$

آنگاه $\partial_۸ T$، یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۷)$ ترید سادهٔ اشتاینری به صورت زیر است:

$$\partial_۸ T_۱ = \{۱۲۴, ۱۳۶, ۱۵۷, ۲۳۵, ۲۶۷, ۴۵۶\},$$

$$\partial_۸ T_۲ = \{۱۲۳, ۱۴۵, ۱۶۷, ۲۴۶, ۲۵۷, ۳۵۶\},$$

$$\partial_۸ T_۳ = \{۱۲۷, ۱۳۵, ۱۴۶, ۲۳۶, ۲۴۵, ۵۶۷\}.\triangle$$

تعریف ۶.۱.۱ [5] $G=\{G_۱,\ldots,G_N\}$ و $H=\{H_۱\ldots,H_N\}$ دو ترید N–پایه هستند. اگر G_i و H_j به ترتیب پایه‌هایی از G و H باشند، تعریف می‌کنیم:

$$G_i|H_j = \{B_{ip}\cup B_{jq} \mid B_{ip}\in G_i, B_{jq}\in H_j\},$$

یعنی بلوک‌های $G_i|H_j$ از کنار هم قرار دادن هر بلوک از G_i با هر بلوک از H_j به دست می‌آید. در این صورت $GH=\{(GH)_۱,\ldots,(GH)_N\}$ را ترکیب دو ترید G و H نامیده، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(GH)_1 = (G_1|H_1) \cup (G_2|H_2) \cup \cdots \cup (G_{N-1}|H_{N-1}) \cup (G_N|H_N),$$
$$(GH)_2 = (G_1|H_2) \cup (G_2|H_3) \cup \cdots \cup (G_{N-1}|H_N) \cup (G_N|H_1),$$
$$\vdots$$
$$(GH)_N = (G_1|H_N) \cup (G_2|H_1) \cup \cdots \cup (G_{N-1}|H_{N-2}) \cup (G_N|H_{N-1}).$$

قضیهٔ ۴.۱.۱ [5] اگر G یک $\mathrm{T}[N](t_1, k_1, v_1)$ ترید روی $X_1 = \{a_1, \ldots, a_{v_1}\}$ و H یک $\mathrm{T}[N](t_2, k_2, v_2)$ ترید روی $X_2 = \{b_1, \ldots, b_{v_2}\}$ باشد که $X_1 \cap X_2 = \emptyset$، در این صورت GH یک $\mathrm{T}[N](t_1 + t_2 + 1, k_1 + k_2, v_1 + v_2)$ ترید است و $\mathrm{vol}(GH) = N \times \mathrm{vol}(G) \times \mathrm{vol}(H)$.

مثال ۹.۱.۱ $\mathrm{T}[3](1, 2, 4)$ ترید سادهٔ G را روی $X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ و $\mathrm{T}[3](0, 1, 3)$ ترید سادهٔ H را روی $X_2 = \{5, 6, 7\}$ در نظر بگیرید:

$$G_1 = \{12, 34\}, \quad G_2 = \{13, 24\}, \quad G_3 = \{14, 23\},$$
$$H_1 = \{5\}, \qquad H_2 = \{6\}, \qquad H_3 = \{7\}.$$

با توجه به قضیهٔ ۴.۱.۱، $GH = \{(GH)_1, (GH)_2, (GH)_3\}$ یک $\mathrm{T}[3](2, 3, 7)$ ترید ساده با حجم $\mathrm{vol}(GH) = 3 \times 2 \times 1 = 6$ است:

$$(GH)_1 = (G_1|H_1) \cup (G_2|H_2) \cup (G_3|H_3) =$$
$$\{125, 345\} \cup \{136, 246\} \cup \{147, 237\} = \{125, 136, 147, 237, 246, 345\},$$
$$(GH)_2 = (G_1|H_2) \cup (G_2|H_3) \cup (G_3|H_1) =$$
$$\{126, 346\} \cup \{137, 247\} \cup \{145, 235\} = \{126, 137, 145, 235, 247, 346\},$$
$$(GH)_3 = (G_1|H_3) \cup (G_2|H_1) \cup (G_3|H_2) =$$
$$\{127, 347\} \cup \{135, 245\} \cup \{146, 236\} = \{127, 135, 146, 236, 245, 347\}.\triangle$$

۲.۱ قراردادها

در کل این پایان‌نامه، منظورمان از ترید، ترید ۲-پایه بوده و اگر ترید N-پایه مورد نظر باشد، حتماً N-پایه بودن آن ذکر می‌شود. ضمناً در همه جای پایان‌نامه، به جز فصل (۲)، با تریدهای ساده

سروکار داریم و منظورمان از ترید (ترید N–پایه)، همان ترید ساده (ترید N–پایهٔ ساده) است و نیز $t = ۲$ و $k = ۳$.

همچنین فرض می‌کنیم که اندازهٔ بنیان ترید همواره با v برابر است، یعنی یک $\mathrm{T}[N](۲,۳,v)$ ترید، تریدی است که در آن دقیقاً v نقطهٔ متمایز به کار رفته‌است. در طول این‌پایان نامه منظور از ترید، ترید غیرپوچ است، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

فصل ۲

ساختار جبری تریدها

۱.۲ تعریف جبری تریدها

در اکثر موارد برای نمایش طرح‌ها و تریدها، بلوک‌های آنها لیست می‌شود، ولی هدایت[۱] و لی[۲] (۱۹۷۹) تعریف دیگری برای تریدها ارائه دادند. این تعریف از منظر جبری به تریدها می‌نگرد، که کاربرد زیادی در بررسی ساختار جبری طرح‌ها و تریدها دارد.

فرض کنید $1 \leq t \leq k \leq v$ و X مجموعه‌ای v عضوی باشد. همچنین فرض کنید عناصر $P_k(X)$ و $P_t(X)$ را با یک ترتیب مشخص مرتب کرده‌ایم. $P^v_{t,k}[p_{A,B}]$ ماتریس شمول $\binom{v}{t} \times \binom{v}{k}$ است که سطرها و ستون‌های آن به ترتیب توسط اعضای $P_t(X)$ و $P_k(X)$ اندیس‌گذاری شده‌اند و برای هر زیرمجموعهٔ $A \subseteq P_t(X)$ و بلوک $B \subseteq P_k(X)$ داریم:

$$p_{A,B} = \begin{cases} 1, & A \subseteq B; \\ 0, & A \nsubseteq B. \end{cases}$$

[۱] Hedayat

[۲] Li

اگر $t \leq k \leq v-t$، $P^v_{t,k}$ **رتبه کامل** است، یعنی رتبهٔ $P^v_{t,k}$ برابر $\binom{v}{t}$ است [4]. حال، معادلهٔ

$$P^v_{t,k} \times F = \lambda e^T, \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن e^T یک بردار ستونی با بعد $\binom{v}{t}$ و همهٔ درایه‌های آن ۱ است. همچنین $F = (f_۱, \ldots, f_{\binom{v}{k}})^T$ برداری است که درایهٔ i اُم آن با بلوک i اُم از $P_k(X)$ (با همان ترتیبی که قبلاً مشخص کرده بودیم) متناظر است. اگر برای هر i، $f_i \geq ۰$، آنگاه می‌توان بردار F را با خانوادهٔ F یکی دانست، که F خانواده‌ای از بلوک‌هاست که در آن بلوک i اُم به تعداد f_i بار ظاهر شده است. همچنین، هر خانواده از بلوک‌ها را می‌توان با یک بردار F متناظر کرد که درایهٔ i اُم از F، برابر است با تعداد دفعات ظهور بلوک i اُم در خانوادهٔ مورد نظر. همچنین هر جواب صحیح F برای معادلهٔ (۱)، یک t-(v,k,λ) **طرح علامت‌دار** و هر جواب صحیح با درایه‌های غیرمنفی برای (۱)، یک t-(v,k,λ) طرح خواهد بود.

قضیهٔ ۱.۱.۲ بردار صحیح T یک جواب $P^v_{t,k} \times F = ۰$ است اگر و فقط اگر T یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید باشد.

اثبات. بردار $T = (f_۱, \ldots, f_{\binom{v}{k}})^T$ و عناصر $P_k(X)$ را با همان ترتیبی که قبلاً مشخص کرده بودیم در نظر بگیرید. دو مجموعهٔ $T_۱$ و $T_۲$ را به این ترتیب بسازید: برای هر $۱ \leq i \leq \binom{v}{k}$، اگر $f_i > ۰$، بلوک i اُم از $P_k(X)$ را به تعداد f_i بار در $T_۱$ قرار دهید و اگر $f_i < ۰$، بلوک i اُم از $P_k(X)$ را به تعداد $|f_i|$ بار در $T_۲$ قرار دهید. در این صورت اگر T یک جواب $P^v_{t,k} \times F = ۰$ باشد، آنگاه $P^v_{t,k} \times T = ۰$ یعنی برای هر $x_۱ \cdots x_t \in P_t(X)$، حاصلضرب داخلی سطر متناظر با $x_۱ \cdots x_t$ از $P^v_{t,k}$ در T برابر صفر است، یعنی $\sum_{i=۱}^{\binom{v}{k}} p_{(x_۱\cdots x_t),B_i} f_i = ۰$. از طرفی، اگر $B_{\alpha_۱}$، $B_{\alpha_۲}$، ... و $B_{\alpha_{\binom{v-t}{k-t}}}$، همهٔ بلوک‌های شامل $x_۱ \cdots x_t$ باشند، آنگاه برای هر $۱ \leq i \leq \binom{v-t}{k-t}$، $p_{(x_۱\cdots x_t),B_{\alpha_i}} = ۱$ و برای سایر بلوک‌های B از $P_k(X)$، $p_{(x_۱\cdots x_t),B} = ۰$. بنابراین می‌توان عبارت فوق را به صورت زیر ساده

کرد:

$$\circ = \sum_{i=1}^{\binom{v}{k}} p_{(x_1 \cdots x_t), B_i} f_i = \sum_{i=1}^{\binom{v-t}{k-t}} p_{(x_1 \cdots x_t), B_{\alpha_i}} f_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{\binom{v-t}{k-t}} f_{\alpha_i},$$

و از اینجا مشخص می‌شود که برای هر $x_1 \cdots x_t \in P_t(X)$، تعداد بلوک‌هایی از $P_k(X)$ که شامل $x_1 \cdots x_t$ هستند، در دو مجموعهٔ T_1 و T_2 برابر است و این دقیقاً تعریف ترید بودن T است. بالعکس، فرض کنید T یک ترید باشد. در این صورت برای هر $x_1 \cdots x_t \in P_t(X)$، تعداد بلوک‌های شامل $x_1 \cdots x_t$ در T_1 و T_2 برابر است و لذا، با همان نمادگذاری‌های بالا، $\sum_{i=1}^{\binom{v-t}{k-t}} f_{\alpha_i} = \circ$. کل روند فوق برگشت‌پذیر است و به آسانی می‌توان نشان داد که در این حالت نیز، T یک جواب $P_{t,k}^v \times F = \circ$ است. ■

نکته: هر ترید ساده جوابی از $P_{t,k}^v \times F = \circ$ است که مولفه‌های آن از مجموعهٔ $\{-1, \circ, 1\}$ می‌آید.

از آنجا که می‌توان هر بردار صحیح را به صورت تفاضل دو بردار صحیح غیرمنفی نمایش داد، به راحتی می‌توان هر جواب F از (۱) را برای $\lambda = \circ$، به صورت $F = F_1 - F_2$ نوشت، که F_1 و F_2 بردارهای صحیح غیرمنفی هستند و ترید T متناظر با بردار F، به صورت $T = T_1 - T_2$ خواهد بود که T_1 و T_2 مجموعه‌های متناظر با F_1 و F_2 هستند. اگر F_1 و F_2 دو جواب (۱) برای $\lambda = \circ$ و T_1 و T_2 تریدهای متناظر با آن باشند، آنگاه به وضوح $F_1 + F_2$ و nF_1 $(n \in \mathbb{N})$ نیز جواب‌های (۱)، به ازای $\lambda = \circ$ هستند و بنابراین $T_1 + T_2$ و nT_1 نیز ترید خواهند بود. با توجه به آنچه گفته شد، نتیجه می‌شود که مجموعهٔ تمام $\mathrm{T}(t,k,v)$ تریدها یک $\mathbb{Z}$-مدول می‌سازد که در واقع این $\mathbb{Z}$-مدول، هستهٔ $P_{t,k}^v$ روی $\mathbb{Z}$ است و وقتی $t \leq k \leq v-t$، می‌دانیم که بُعد $P_{t,k}^v$ برابر $\binom{v}{t}$ است، لذا بُعد هستهٔ $P_{t,k}^v$، که آن را $N_{t,k}^v$ می‌نامیم، $\binom{v}{k} - \binom{v}{t}$ است. پایه‌های مختلفی برای $N_{t,k}^v$ شناسایی شده است [4,8,12]. خسروشاهی و میسوری [۳] [12]، پایهٔ جدیدی برای تریدها معرفی کردند که آن را **پایهٔ استاندارد** می‌نامند و در روش ارائه شده برای رده‌بندی $(۲,۳,۸)$T[۳] تریدها از این پایه

[۳] Maysoori

استفاده می‌کنیم.

گفتیم که $\dim(N^v_{t,k}) = \binom{v}{k} - \binom{v}{t}$. می‌توان ماتریس $M^v_{t,k}$ را به صورت $\binom{v}{k} \times (\binom{v}{k} - \binom{v}{t})$ بُعدیِ زیر در نظر گرفت، که $\binom{v}{k} - \binom{v}{t}$ تریدِ پایهٔ استاندارد، ستون‌های آن را تشکیل می‌دهند:

$$M^v_{t,k} = \begin{pmatrix} I \\ \overline{M}^v_{t,k} \end{pmatrix}, \tag{۲}$$

I ماتریس واحد مرتبهٔ $\binom{v}{k} - \binom{v}{t}$ است که سطرهای متناظر با آن به وسیلهٔ **بلوک‌های ابتدایی** و باقی سطرها به وسیلهٔ **بلوک‌های غیرابتدایی** اندیس‌گذاری شده‌اند. حال، با توجه به رابطهٔ (۲) می‌توان لم زیر را مطرح کرد:

لم ۱.۱.۲ مجموعهٔ T از $P_k(X)$، یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید غیر پوچ است، اگر و فقط اگر T یک ترکیب خطی از ستون‌های $M^v_{t,k}$ و شامل حداقل یک بلوک ابتدایی باشد.

برای بلوک‌های ابتدایی متناظر با سه‌تایی (t,k,v) روی مجموعهٔ نقاط $\{۱,\dots,v\}$، خاصیت زیر برقرار است:

اگر از بلوک‌های ابتدایی متناظر با سه‌تایی (t,k,v)، بلوک‌هایی را که شامل عنصر ۱ هستند، انتخاب کرده و از آنها عنصر ۱ را حذف کنیم، آنچه باقی می‌ماند بلوک‌های ابتدایی متناظر با سه‌تایی $(t-۱,k-۱,v-۱)$ روی مجموعهٔ نقاط $\{۲,\dots,v\}$ است.

بنابراین ساختار بلوکی زیر برای $M^v_{t,k}$ موجود است:

$$M^v_{t,k} = \begin{pmatrix} I & \circ \\ \circ & I \\ K & L \\ Q & R \end{pmatrix}, \tag{۳}$$

که اندیس‌های متناظر با سطرهای بلوکی اول و سوم از ماتریس فوق، به ترتیب بلوک‌های ابتدایی و غیرابتدایی متناظر با سه‌تایی $(t-۱,k-۱,v-۱)$ را تشکیل می‌دهند. همچنین به کمک لم ۱.۱.۲ می‌توان نتیجه گرفت که $L = \circ$. بنابراین $K = \overline{M}^{v-۱}_{t-۱,k-۱}$ و به وضوح $R = \overline{M}^{v-۱}_{t,k}$. یعنی رابطهٔ (۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$M^v_{t,k} = \begin{pmatrix} I & \circ \\ \circ & I \\ \overline{M}^{v-۱}_{t-۱,k-۱} & \circ \\ Q & \overline{M}^{v-۱}_{t,k} \end{pmatrix}. \tag{۴}$$

همچنین با جابجایی سطرهای $M^v_{t,k}$، خواهیم داشت:

$$M^v_{t,k} = \begin{pmatrix} M^{v-۱}_{t-۱,k-۱} & \circ \\ N & M^{v-۱}_{t,k} \end{pmatrix}. \tag{۵}$$

در فصل (۵)، برای پیاده سازی الگوریتم یافتن $(۲,۳,۸)$[۳]T تریدهای ساده، از فرم (۴) استفاده می‌کنیم. ماتریس $M^۸_{۲,۳}$ به فرم معادلهٔ (۴) در جدول ۵-۱ آمده است.

۲.۲ رهیافت جبری به تریدهای N-پایه

در بخش قبل دیدیم که چگونه می‌توان به کمک ساختارهای جبری نشان داد $\mathbb{Z}$-مدول تریدهای معمولی (تریدهای ۲-پایه)، به عنوان زیرمدولی از $\mathbb{Z}$-مدول طرح‌ها، هستهٔ ماتریس شمول روی $\mathbb{Z}$-مدول طرح‌ها است. این ساختار جبری، به یافتن پایه‌هایی متفاوت برای مدول تریدها منجر شد، که بسیار کارآمد بودند. همچنین، آجودانی [۴] و خسروشاهی [1]، **ضرب** دو ترید ۲-پایه را تعریف کرده و قضیهٔ مهم زیر را برای آن ثابت کرده‌اند:

تعریف ۱.۲.۲ فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو مجموعهٔ جدا از هم باشند که $|X_۱| = v_۱$ و $|X_۲| = v_۲$. برای $B_۱ \subseteq P_{k_۱}(X_۱)$ و $B_۲ \subseteq P_{k_۲}(X_۲)$، تعریف می‌کنیم:

$$B_۱ * B_۲ = \{A_۱ \cup A_۲ \mid A_۱ \in B_۱, A_۲ \in B_۲\}.$$

در این صورت، اگر $T_i = \{T_i^+, T_i^-\}$ یک $\mathrm{T}(t_i, k_i, v_i)$ ترید با حجم $\mathrm{vol}(T_i) = s_i$ روی X_i باشد، $i = ۱,۲$، آنگاه ضرب $T_۱$ و $T_۲$، که آنرا با $T_۱ * T_۲$ نشان می‌دهیم، به این صورت تعریف می‌شود:

[۴] Ajoodani

$$T_1 * T_2 = \{(T_1^+ * T_2^+) \cup (T_1^- * T_2^-), (T_1^+ * T_2^-) \cup (T_1^- * T_2^+)\}.$$

با پارامترها و نمادهای فوق، قضیهٔ مهم زیر در زمینهٔ ضرب تریدها ثابت شده است:

قضیهٔ ۲.۲.۲ [1] $T_1 * T_2$ یک $\mathrm{T}(t_1 + t_2 + 1, k_1 + k_2, v_1 + v_2)$ ترید با حجم $2s_1s_2$ است.

در تعریف ۱.۲.۲، با نسبت دادن علامت + به یک پایه از ترید و علامت − به پایهٔ دیگر، از ضرب متداول علامت‌های + و − استفاده شد تا بتوان حاصل‌ضرب دو ترید را به عنوان یک ترید معرفی کرد. حال فرض کنید T_1 و T_2 دو $\mathrm{T}[N](t,k,v)$ ترید N−پایه باشند. در این صورت نمی‌توان از تعریف ۱.۲.۲ برای ضرب تریدها استفاده کرد. اگر به نمایش تریدهای مینیمال به صورت ضرب چندجمله‌ای‌ها نگاه کنیم، در می‌یابیم که با علامت‌های + و − نمی‌توان پایه‌های یک ترید N−پایه را مشخص کرد. همچنین فرض کنید از N نماد متمایز (مانند +، −، □، * و...) برای پایه‌های ترید استفاده کنیم. در این صورت در ضرب چندجمله‌ای‌ها با این مشکل برخورد خواهیم کرد که ضرب هر دو نماد (مثلاً * و □) معادل با چه نمادی خواهد بود. البته در تعریف ۶.۱.۱ سعی شده است تا ضربی برای دو ترید N−پایه ارائه گردد. در این بخش سعی داریم تا ساختار جبری جدیدی ارائه دهیم که بتوان به کمک آن، تریدهای N−پایه را نیز به عنوان یک مدول شناسایی کرد. همچنین به کمک این ساختار، ضرب ارائه شده برای تریدهای ۲−پایه، به تریدهای N−پایه نیز تعمیم می‌یابد.

برای $N \in \mathbb{N}$، ریشه‌های مرتبهٔ N عدد یک را در نظر بگیرید. می‌دانیم این ریشه‌ها با عمل ضرب، تشکیل یک گروه دوری مرتبهٔ N می‌دهند. فرض می‌کنیم ω مولد این گروه باشد. در این صورت $\omega^N = 1$ و این گروه ضربی به صورت $G = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}\}$ نمایش داده می‌شود. معادلهٔ (۱) از بخش قبل را در نظر بگیرید. دیدیم که وقتی $\lambda = 0$، آنگاه هر جواب F از (۱)، یک ترید است. از این پس معادلهٔ $P_{t,k}^v \times F = \lambda e^T$ را روی حلقهٔ $\mathbb{Z}[\omega] \cong \frac{\mathbb{Z}[x]}{<1-x^N>}$، به جای $\mathbb{Z}$، در نظر می‌گیریم. فرض کنید $F = (f_1, f_2, \dots, f_{\binom{v}{k}})^T$، یک جواب معادلهٔ $P_{t,k}^v \times F = 0$ باشد. می‌توان فرض کرد f_i ها ترکیبات خطی از ضرایب مثبت ω هستند، زیرا چنانچه ضریب ω^l از f_i منفی

باشد، با استفاده از تساوی $\circ = 1+\omega+\cdots+\omega^{N-1}$، $-\omega^l$ را با عبارت $-\omega^l(1+\omega+\cdots+\omega^{N-1})$ تعویض می‌کنیم، که فقط شامل ضرایب مثبت از توان‌های ω است. با تکرار این عمل برای هر یک از ضرایب منفی ظاهر شده در f_i ها، در نهایت به نمایشی از بردار F می‌رسیم که در آن همهٔ ضرایب توان‌های ω غیرمنفی هستند. از طرفی $\mathrm{T}[N](t,k,v)$ ترید $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ را با ترتیبی ثابت برای پایه‌های آن، به صورت $T = (T_1, T_2, \ldots, T_N)$ در نظر می‌گیریم. در بخش قبل، برای تعریف ماتریس $P^v_{t,k}$، به عناصر $P_k(X)$ ترتیب ثابتی داده بودیم. با در نظر گرفتن همان ترتیب برای $P_k(X)$، فرض می‌کنیم $\alpha^{(j)}$ عنصر j ام از $P_k(X)$ باشد. از آنجا که ترید T لزوماً ساده نیست، ممکن است $\alpha^{(j)}$ در بیش از یکی از T_i ها ظاهر شده باشد. فرض کنید دنبالهٔ ظهور $\alpha^{(j)}$ در T_i ها به صورت $(\alpha^{(j)}_1, \ldots, \alpha^{(j)}_N)$ باشد. برای هر $1 \le j \le \binom{v}{k}$، قرار می‌دهیم:

$$f_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha^{(j)}_i \omega^{i-1}.$$

با توجه به آنچه گفته شد، می‌توان دریافت که با ظهور توان‌های ω در f_j ها، به طور ضمنی هر ستون T_i از ترید T را با ω^{i-1} متناظر کرده‌ایم.

قضیهٔ ۳.۲.۲ اگر F بردار متناظر با $\mathrm{T}[N](t,k,v)$ ترید T باشد، آنگاه $F = (f_1, f_2, \ldots, f_{\binom{v}{k}})$ یک جواب معادلهٔ $P^v_{t,k} \times F = \circ$ است.

عکس قضیهٔ فوق در حالت کلی برقرار نیست. فرض کنید $d|N$ و $d \neq 1, N$. اگر ω ریشهٔ N اُم اولیه باشد، آنگاه $\omega^{\frac{N}{d}}$ ریشهٔ d اُم اولیه خواهد بود. پس $\circ = 1 + \omega^{\frac{N}{d}} + \omega^{2\frac{N}{d}} + \cdots + \omega^{(d-1)\frac{N}{d}}$. حال، معادلهٔ $P^v_{t,k} \times F = \circ$ را روی حلقهٔ $\mathbb{Z}[\omega^{\frac{N}{d}}]$ و F_1 را یک جواب معادلهٔ فوق روی حلقهٔ گفته شده در نظر می‌گیریم. در این صورت F_1 یک ترید d پایه خواهد بود. از طرفی، F_1 جوابی از معادلهٔ فوق روی حلقهٔ $\mathbb{Z}[\omega]$ نیز می‌باشد. از آنجا که در تمام درایه‌های F_1، تنها ضرایب $\omega^{i(\frac{N}{d})}$ (برای $\circ \le i < d$) ناصفر هستند، ترید F_1 نمی‌تواند بیش از d پایه داشته باشد. از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که همهٔ جواب‌های معادلهٔ $P^v_{t,k} \times F = \circ$ روی حلقهٔ $\mathbb{Z}[\omega]$، لزوماً ترید N–پایه نیستند.

قضیهٔ ۴.۲.۲ اگر ω یک ریشهٔ N اُم واحد باشد، هر جواب معادلهٔ $P^v_{t,k} \times F = 0$ روی حلقهٔ $\mathbb{Z}[\omega]$، یک ترید N-پایه است اگر و فقط اگر N عددی اول باشد.

اثبات. برای اثبات قضیهٔ فوق، کافیست ثابت کنیم وقتی N اول است، هر بردار جواب معادلهٔ $P^v_{t,k} \times F = 0$ یک ترید N-پایه است. با برهان خلف، فرض می‌کنیم جوابی از این معادله یک ترید d-پایه باشد که $d < N - 1$. پس در درایه‌های F دقیقاً d توان مختلف از ω ظاهر می‌شود. فرض کنید $m_1, \ldots, m_d$ دنبالهٔ توان‌های ω ظاهر شده در F باشد. پس اعداد صحیح $a_1, \ldots, a_d$ موجود هستند که $\sum_{i=1}^{d} a_i \omega^{m_i} = 0$. بنابراین اگر $p(x)$ عامل تحویل‌ناپذیری برای چندجمله‌ای $\sum_{i=1}^{d} a_i x^{m_i}$ روی $\mathbb{Z}$ باشد، به طوری که ω در آن صدق کند، به وضوح $\deg(p(x)) < N$، در نتیجه $p(x)|(1 - x^N)$ و به این دلیل که $(1 - x)(1 + x + \cdots + x^{N-1})$ تنها تجزیهٔ $(1 - x^N)$ به عوامل تحویل‌ناپذیر است (با توجه به اول بودن N)، پس $p(x) = 1 + x + \cdots + x^{N-1}$ یا $p(x) = 1 - x$. اگر $p(x) = 1 + x + \cdots + x^{N-1}$، دراین صورت $N - 1 = \deg(p) \leq d$ که با فرض $d < N - 1$ متناقض است. اگر $p(x) = 1 - x$، با توجه به اینکه در $\mathbb{Z}[\omega]$ داریم $-x = 1 + x^2 + \cdots + x^{N-1}$، باز هم مثل قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین در حالتی که N عددی اول باشد، هیچ جوابی از معادلهٔ $P^v_{t,k} \times F = 0$ تریدی با تعداد پایه‌های کمتر از N نخواهد بود. ■

حال با توجه به قضیهٔ ۳.۲.۲، می‌توان هر ترید N-پایه را به صورت یک چندجمله‌ای از $\mathbb{Z}[\omega]$ در نظر گرفته، به سادگی ضرب دو ترید را تعریف کرد، یعنی می‌توان دو ترید را به صورت

$$(B_{11} + \cdots + B_{1s}) + (B_{21} + \cdots + B_{2s})\omega + \cdots + (B_{N1} + \cdots + B_{Ns})\omega^{N-1},$$

$$(B'_{11} + \cdots + B'_{1s}) + (B'_{21} + \cdots + B'_{2s})\omega + \cdots + (B'_{N1} + \cdots + B'_{Ns})\omega^{N-1},$$

نمایش داده (B_{ij} ها و B'_{ij} ها به ترتیب بلوک‌های موجود در پایهٔ i اُم از تریدهای T و T' هستند) و آنها را به عنوان دو چندجمله‌ای در هم ضرب کرد و در نهایت حاصل را بر اساس توان‌های ω مرتب کرد. در این صورت می‌توان فرض کرد ضرایب ω^{i-1} نشان دهندهٔ پایهٔ i اُم از ترید حاصل‌ضرب است.

فصل ۳

رده‌بندی تریدهای ۳-پایهٔ ساده به ازای $v = ۶, ۷$

از آنجا که هر $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید، سه پایه دارد که هر دو پایه از آن تشکیل یک ترید معمولی می‌دهند، لذا شرایط زیر برای حجم و اندازهٔ بنیان هر ترید ۳-پایه نیز برقرار است:

$$۶ = k + t + ۱ \leq |\mathrm{found}(T)|, \quad ۴ = ۲^t \leq \mathrm{vol}(T).$$

با این تفاوت که ممکن است تساوی هیچ‌گاه برقرار نباشد. بنابراین برای $v \leq ۵$، هیچ $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ تریدی موجود نیست و لذا کوچکترین مقدار v که باید برای آن، وجود یک $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید را بررسی کرد، $v = ۶$ است.

در این فصل قصد داریم با بحثی ساختنی، تمام تریدهای ساده با $v = ۶, ۷$ را بیابیم. همچنین نتایج موجود برای تریدهایی با بیش از ۲-پایه را نیز مطرح می‌کنیم.

۱.۳ رده‌بندی $\mathrm{T}[۳](۲,۳,٦)$ تریدها

بر اساس آنچه در [9] آمده است، خسروشاهی و بقیه، نشان دادند که با تقریب یکریختی، تنها سه ترید با اندازهٔ بنیان ۶ و حجم‌های ۴، ۶ و ۱۰ وجود دارد، که از این سه ترید تنها یکی از آنها اشتاینری بوده و دوتای دیگر غیراشتاینری هستند. از طرف دیگر، حکم زیر برقرار است.

لم۳.۱.۱ هر $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده با اندازهٔ بنیان کمتر از ۸، حتماً اشتاینری است.

اثبات. با برهان خلف، فرض می‌کنیم $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید سادهٔ T برای $v < ۸$ غیراشتاینری باشد. بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم زوج ۱۲ حداقل دو بار در هر پایهٔ ترید ظاهر شده باشد. در این صورت زوج ۱۲ باید حداقل در شش بلوک از کل بلوک‌های ترید (یعنی حداقل دو بلوک در هر پایه) ظاهر شده باشد. از طرفی ترید T ساده است، لذا بلوک‌های شامل ۱۲ دوبه‌دو متمایز هستند و از اینجا نتیجه می‌شود که مجموعهٔ بنیان ترید، حداقل $۸ = ۲ + ٦$ عضو دارد که با فرض $v < ۸$ متناقض است.■

نتیجه: تنها $\mathrm{T}(۲,۳,٦)$ تریدهای سادهٔ اشتاینری ممکن است قابل گسترش به $\mathrm{T}[۳](۲,۳,٦)$ ترید ساده باشند.

قضیهٔ۳.۱.۱ هیچ $\mathrm{T}[۳](۲,۳,٦)$ ترید ساده‌ای وجود ندارد.

اثبات. با توجه به نتیجهٔ قبل، تنها ترید ساده با $\mathrm{found}(T) = ٦$، موجود در [9]، که قابل گسترش به یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,٦)$ ترید باشد، ترید $T = \{T_۱, T_۲\}$،

$$T_۱ = \{۱۲۳, ۱۴۵, ۲۴٦, ۳۵٦\}, \quad T_۲ = \{۱۲۴, ۱۳۵, ۲۳٦, ۴۵٦\},$$

است. (این ترید همان ترید مینیمال برای $k = ۳$ و $t = ۲$ است.) از طرفی، برای ساختن پایهٔ سوم این ترید و گسترش آن به یک ترید ۳-پایه، باید بلوک‌های پایهٔ سوم را بسازیم، به طوری که $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$، شرایط ترید ۳-پایهٔ ساده را داشته باشند، یعنی هر زوج از مجموعهٔ $X = \{۱, \ldots, ٦\}$،

در همهٔ پایه‌ها به تعداد دفعات برابر ظاهر شده باشد و نیز بلوک تکراری وجود نداشته باشد. زوج **۱۲** در $T_۱$ ظاهر شده است، بنابراین باید در $T_۳$ نیز ظاهر شود. از طرفی **۱۲** در بلوک‌های **۱۲۴** و **۱۲۳** ظاهر شده است، پس این بلوک‌ها نمی‌توانند در $T_۳$ ظاهر شوند. بنابراین یکی از بلوک‌های **۱۲۵** یا **۱۲۶** باید در $T_۳$ ظاهر شوند، در حالی که زوج **۲۵** که در بلوک **۱۲۵** آمده، در $T_۱$ ظاهر نشده است و به همین ترتیب زوج **۱۶** در $T_۱$ ظاهر نشده است. بنابراین هیچ یک از این دو بلوک نمی‌توانند در $T_۳$ ظاهر شوند و لذا $T = \{T_۱, T_۲\}$ قابل گسترش به یک ترید ۳-پایه نیست.■

۲.۳ رده بندی $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۷)$ تریدها

خسروشاهی و بقیه [9]، همچنین نشان داده‌اند که مجموعاً ۱۲ تا $\mathrm{T}(۲,۳,۷)$ ترید سادهٔ غیریکریخت با اندازهٔ بنیان ۷ وجود دارد، که از این تعداد، ۱۰ تا غیراشتاینری بوده و تنها دو ترید ساده با اندازهٔ بنیان ۷، اشتاینری هستند، که حجم یکی از این دو ترید ۷ و حجم دیگری ۶ است. بنابراین طبق لم ۱.۱.۳، می‌توان نتیجه گرفت که گسترش تنها دو ترید اشتاینری از تریدهای موجود در [9] ممکن است منجر به ساخت $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۷)$ ترید ساده شود.

لم۲.۲.۳ هیچ $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۷)$ ترید ساده‌ای با حجم ۷وجود ندارد.

اثبات. می‌دانیم که اگر T یک $\mathrm{T}(۲,۳,۷)$ ترید سادهٔ اشتاینری با حجم ۷ باشد، آنگاه هر پایهٔ آن یک $(۳,۷,۱)$-۲ طرح اشتاینری است. اما طبق لم ۱.۲.۴، می‌دانیم $D(۲,۳,۷) = ۲$، یعنی نمی‌توان سه $(۳,۷,۱)$-۲ طرح سادهٔ دو به دو مجزا یافت. بنابراین هیچ $\mathrm{T}(۲,۳,۷)$ ترید ساده‌ای با حجم ۷، که قابل گسترش به یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۷)$ ترید ساده باشد، وجود ندارد.■

لم۳.۲.۳ با تقریب یکریختی، تنها یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۷)$ ترید ساده با حجم ۶ وجود دارد.

اثبات. برای اثبات از روش ساختنی استفاده می‌کنیم. با تقریب یکریختی، تنها یک $\mathrm{T}(۲,۳,۷)$ ترید سادهٔ اشتاینری با حجم ۶ وجود دارد [9]. پایه‌های این ترید به صورت زیر است:

$$T_۱ = \{۱۲۳, ۱۶۷, ۲۴۷, ۲۵۶, ۳۴۶, ۳۵۷\},\quad T_۲ = \{۱۲۷, ۱۳۶, ۲۳۵, ۲۴۶, ۳۴۷, ۵۶۷\}.$$

حال سعی می‌کنیم تا تمام حالت‌های ممکن برای ستون سوم این ترید را بررسی کنیم، یعنی سعی می‌کنیم $T_۳$ را بیابیم، به گونه‌ای که $\{T_۱, T_۲, T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۷)$ ترید ساده باشد. با کمی دقت به ساختار $T_۱$ و $T_۲$، در می‌یابیم که تنها بلوک‌های شامل ۱ در $T_۱$ و $T_۲$ به صورت زیر هستند:

$$۱۲۳, ۱۶۷ \in T_۱;\quad ۱۲۷, ۱۳۶ \in T_۲.$$

بنابراین بلوک‌هایی از $T_۳$ که شامل ۱ هستند، باید به شکل ۱۲۶ و ۱۳۷ باشند (زیرا زوج‌های ۱۲، ۱۳، ۱۶ و ۱۷ باید در $T_۳$ ظاهر شوند و البته نباید بلوک تکراری داشته باشیم). به همین ترتیب، بلوک‌های شامل ۴ در $T_۱$ و $T_۲$ به صورت زیر هستند:

$$۲۴۷, ۳۴۶ \in T_۱;\quad ۲۴۶, ۳۴۷ \in T_۲.$$

لذا بلوک‌های ۴۶۷ و ۲۳۴ باید در $T_۳$ ظاهر شوند. با بحثی مشابه برای عنصر ۵ در می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{r} ۲۵۶, ۳۵۷ \in T_۱ \\ ۲۳۵, ۵۶۷ \in T_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۵۷, ۳۵۶ \in T_۳.$$

بنابراین بلوک‌های موجود در $T_۳$ به صورت یکتا تعیین می‌شوند. لذا $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ به صورت زیر، تنها $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۷)$ ترید ساده با حجم ۶ است:

$$T_۱ = \{۱۲۳, ۱۶۷, ۲۴۷, ۲۵۶, ۳۴۶, ۳۵۷\},$$

$$T_۲ = \{۱۲۷, ۱۳۶, ۲۳۵, ۲۴۶, ۳۴۷, ۵۶۷\},$$

$$T_۳ = \{۱۲۶, ۱۳۷, ۲۳۴, ۲۵۷, ۳۵۶, ۴۶۷\}.\blacksquare$$

نکته: در اثبات فوق، ایدهٔ بررسی نقاط ۱، ۴ و ۵ از آنجا ناشی شد که هر یک از $T_۱$ و $T_۲$ یک $۲-(۳,۷,۱)$ طرح ساده هستند، که از آنها بلوک ۱۴۵ حذف شده است. به عبارت دیگر با اضافه کردن بلوک ۱۴۵ به $T_۱$ (و نیز $T_۲$) یک $۲-(۳,۷,۱)$ طرح ساده به دست می‌آید.

به عنوان نتیجهٔ مستقیمی از قضیهٔ ۱.۱.۳ و لم‌های ۳.۱.۱، ۳.۲.۲ و ۳.۲.۳، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ۳.۲.۲ با تقریب یکریختی، تنها یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده با اندازهٔ بنیان ۷ وجود دارد، که حجم آن ۶ بوده و کوچکترین $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده است.

۳.۳ نتایج موجود برای تریدهای N-پایه

در [3] به کمک برنامه‌ای کامپیوتری، تمام $\mathrm{T}[N](۲,۳,v)$ تریدهای اشتاینری غیریکریخت با حجم کمتر از ۱۰ به دست آمده است. نتایج به دست آمده در این مقاله، برای $N > ۲$ و $\mathrm{vol}(T) < ۱۰$، در جدول ۳-۱ آمده است.

همچنین دو ترید زیر نیز موجود هستند:

۱) $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۹)$ ترید $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ با $\mathrm{vol}(T) = ۱۰$:

$$T_۱ = \{۱۲۳, ۱۴۷, ۱۵۹, ۱۶۸, ۲۴۹, ۲۵۸, ۲۶۷, ۳۵۷, ۳۶۹, ۴۵۶\},$$
$$T_۲ = \{۱۲۴, ۱۳۹, ۱۵۸, ۱۶۷, ۲۳۷, ۲۵۹, ۲۶۸, ۳۵۶, ۴۵۷, ۴۶۹\},$$
$$T_۳ = \{۱۲۸, ۱۳۶, ۱۴۹, ۱۵۷, ۲۳۷, ۲۴۵, ۲۶۹, ۳۵۹, ۴۶۷, ۵۶۸\}.$$

۲) $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۱۱)$ ترید $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ با $\mathrm{vol}(T) = ۱۲$:

(نمادهای A و B به ترتیب برای اعداد ۱۰ و ۱۱ به کار رفته‌اند.)

$$T_۱ = \{۱۲۳, ۱۴۵, ۱۶۷, ۱۸۹, ۱AB, ۲۴۶, ۲۵۷, ۲۸A, ۲۹B, ۳۴۷, ۳۵۶, ۳۹A\},$$
$$T_۲ = \{۱۲۸, ۱۳A, ۱۴۶, ۱۵۷, ۱۹B, ۲۳۹, ۲۴۷, ۲۵۶, ۲AB, ۳۴۵, ۳۶۷, ۸۹A\},$$
$$T_۳ = \{۱۲B, ۱۳۹, ۱۴۷, ۱۵۶, ۱۸A, ۲۳A, ۲۴۵, ۲۶۷, ۲۸۹, ۳۴۶, ۳۵۷, ۹AB\}.$$

$\mathrm{T}[۳](۲,۳,۹)$ ترید فوق به کمک صفحهٔ آفین به دست آمده است. صفحهٔ آفین مرتبهٔ ۳ زیر را در نظر بگیرید:

$$F_۱ = \{۱۲۳, ۴۵۶, ۷۸۹, ۱۴۷, ۲۵۸, ۳۶۹, ۱۵۹, ۳۴۸, ۲۶۷, ۳۵۷, ۱۶۸, ۲۴۹\},$$

روی $F_۱$ جایگشت $\sigma_۱ = (۱۲)(۳۴)$ را اعمال می‌کنیم تا به مجموعهٔ $F_۲$ برسیم:

$$F_۲ = \{۱۲۴, ۳۵۶, ۷۸۹, ۲۳۷, ۱۵۸, ۴۶۹, ۲۵۹, ۳۴۸, ۱۶۷, ۴۵۷, ۲۶۸, ۱۳۹\},$$

بار دیگر جایگشت $\sigma_۲ = (۲۶)(۷۹)$ را روی $F_۱$ اعمال می‌کنیم تا به مجموعهٔ $F_۳$ برسیم:

$$F_۳ = \{۱۳۶, ۲۴۵, ۷۸۹, ۱۴۹, ۵۶۸, ۲۳۷, ۱۵۷, ۳۴۸, ۲۶۹, ۳۵۹, ۱۲۸, ۴۶۷\},$$

همانطور که دیده می‌شود، بلوک‌های $\{۷۸۹\}$ و $\{۳۴۸\}$ در هر سه مجموعهٔ $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$ ظاهر شده‌اند. با حذف این دو بلوک از $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$، به سه مجموعهٔ دو به دو مجزایِ $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ می‌رسیم که $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ همان $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, ۹)$ ترید T با $\mathrm{vol}(T) = ۱۰$ است.

جدول ۳-۱: تریدهای اشتاینری ۳-پایه و ۴-پایه با حجم کمتر از ۱۰

ردیف	$\lvert \mathrm{found}(T) \rvert$	$\mathrm{vol}(T)$	N	$T = \{T_۱, \ldots, T_N\}$
۱	۷	۶	۳	{۱۲۷, ۱۳۵, ۱۴۶, ۲۳۶, ۲۴۵, ۳۴۷} {۱۲۶, ۱۳۷, ۱۴۵, ۲۳۵, ۲۴۷, ۳۴۶} {۱۲۵, ۱۳۶, ۱۴۷, ۲۳۷, ۲۴۶, ۳۴۵}
۲	۸	۸	۳	{۱۲۸, ۱۳۵, ۱۴۷, ۲۳۶, ۲۵۷, ۳۴۸, ۴۵۶, ۶۷۸} {۱۲۷, ۱۳۸, ۱۴۵, ۲۳۵, ۲۶۸, ۳۴۶, ۴۷۸, ۵۶۷} {۱۲۳, ۱۴۸, ۱۵۷, ۲۵۶, ۲۷۸, ۳۴۵, ۳۶۸, ۴۶۷}
۳	۸	۸	۴	{۱۲۸, ۱۳۵, ۱۴۷, ۲۳۶, ۲۵۷, ۳۴۸, ۴۵۶, ۶۷۸} {۱۲۷, ۱۳۸, ۱۴۵, ۲۳۵, ۲۶۸, ۳۴۶, ۴۷۸, ۵۶۷} {۱۲۳, ۱۴۸, ۱۵۷, ۲۵۶, ۲۷۸, ۳۴۵, ۳۶۸, ۴۶۷} {۱۲۵, ۱۳۴, ۱۷۸, ۲۳۸, ۲۶۷, ۳۵۶, ۴۵۷, ۴۶۸}
۴	۹	۹	۳	{۱۲۹, ۱۳۵, ۱۴۷, ۲۳۶, ۲۷۸, ۳۴۹, ۴۶۸, ۵۶۷, ۵۸۹} {۱۲۳, ۱۴۹, ۱۵۷, ۲۶۷, ۲۸۹, ۳۴۶, ۳۵۹, ۴۷۸, ۵۶۸} {۱۲۷, ۱۳۴, ۱۵۹, ۲۳۹, ۲۶۸, ۳۵۶, ۴۶۷, ۴۸۹, ۵۷۸}
۵	۹	۹	۳	{۱۲۹, ۱۳۵, ۱۴۷, ۲۳۶, ۲۴۸, ۲۵۷, ۳۴۹, ۴۵۶, ۵۸۹} {۱۲۳, ۱۴۹, ۱۵۷, ۲۴۷, ۲۵۶, ۲۸۹, ۳۴۶, ۳۵۹, ۴۵۸} {۱۲۷, ۱۳۴, ۱۵۹, ۲۳۹, ۲۴۶, ۲۵۸, ۳۵۶, ۴۵۷, ۴۸۹}
۶	۹	۹	۳	{۱۲۹, ۱۳۵, ۱۶۸, ۲۴۶, ۲۵۷, ۳۴۹, ۳۶۷, ۴۵۸, ۷۸۹} {۱۲۶, ۱۳۹, ۱۵۸, ۲۴۵, ۲۷۹, ۳۴۶, ۳۵۷, ۴۸۹, ۶۷۸} {۱۲۵, ۱۳۶, ۱۸۹, ۲۴۹, ۲۶۷, ۳۴۵, ۳۷۹, ۴۶۸, ۵۷۸}

فصل ۴

تریدهای ماکسیمال

۱.۴ تریدهای سادهٔ ماکسیمال $\mathrm{T}(۲,۳,v)$

تعریف ۱.۱.۴ برای t,k,v داده شده، $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید ساده‌ای با بزرگترین حجم ممکن، یک $\mathrm{T}(t,k,v)$ **ترید ماکسیمال** نامیده می‌شود و با $T_M(v)$ نمایش داده می‌شود. یعنی ترید T ماکسیمال است هرگاه حجم آن از حجم هر $\mathrm{T}(t,k,v)$ ترید دیگر، بزرگ‌تر بوده یا با آن برابر باشد.

در [13]، $\mathrm{T}(۲,۳,v)$ تریدهای سادهٔ ماکسیمال مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مسالهٔ تریدهای ماکسیمال و حجم ترید ماکسیمال برای $\mathrm{T}(۲,۳,v)$ تریدها، توسط خسروشاهی و ترابی [1] [13] و لفور [2] [14]، مورد بررسی قرار گرفته و حجم $\mathrm{T}(۲,۳,v)$ ترید سادهٔ ماکسیمال مشخص شده است. نتایج این مقالات در قضیهٔ ۱.۱.۴ آمده است:

قضیهٔ ۱.۱.۴ [13,14]

۱) اگر v زوج باشد و $v=۴m+l$، آنگاه $\mathrm{vol}(T_M(v))=\frac{m(۴m+۱)(۴m+۳l-۴)}{۳}$.

[1] Torabi

[2] Lefevre

۲) اگر v فرد باشد، آنگاه

(a) اگر $v \equiv ۱ \text{or} ۳ \pmod{٦}$ و $v > ۷$، آنگاه $\text{vol}(T_M(v)) = \frac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۲}$.

(b) $\text{vol}(T_M(۷)) = ۱۲$.

(c) اگر $v = ٦m + ۵$، آنگاه $\text{vol}(T_M(v)) = ۱۸m^۳ + ۳۳m^۲ + ۱۹m + ۲$.

حجم ترید ماکسیمال برای $\text{T}(۲, ۳, v)$ تریدهای ساده با اندازهٔ بنیان v، در جدول ۴-۱ آمده است.

۲.۴ قضایای مربوط به مجموعهٔ بزرگ

در این فصل قصد داریم تا حجم $\text{T}[۳](۲, ۳, v)$ تریدهای سادهٔ ماکسیمال را به ازای مقادیری از v محاسبه کنیم. برای این منظور، ابتدا به بررسی قضایای زیر که در رابطه با مجموعهٔ بزرگ طرح‌ها موجود است، می‌پردازیم:

قضیهٔ ۲.۲.۴ [15] $\text{LS}(۲, ۳, v)$ برای $v \geq ۳$ موجود است، اگر و فقط اگر $v \equiv ۱ \text{or} ۳ \pmod{٦}$ و $v \neq ۷$.

لم ۱.۲.۴ [15] $\text{D}(۲, ۳, ۷) = ۲$.

مجموعه شرایط لازم برای وجود یک t-(v, k, λ) طرح، این است که برای هر $۰ \leq i \leq t$، $\lambda_i = \frac{\lambda\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}}$ یک عدد صحیح باشد و البته در حالت خاص $\lambda = \frac{\binom{v-t}{k-t}}{N}$، شرایط لازم برای وجود یک t-$(v, k, \frac{\binom{v-t}{k-t}}{N})$ طرح این است که برای هر $۰ \leq i \leq t$، $\binom{v-t}{k-t}\binom{v-i}{t-i}$ بر $N\binom{k-i}{t-i}$ بخشپذیر باشد و از آنجا که $\binom{v-t}{k-t} \times \binom{v-i}{t-i} = \binom{k-i}{t-i} \times \binom{v-i}{k-i}$، می‌توان شرایط را به این صورت ساده کرد که برای هر $۰ \leq i \leq t$، $N | \binom{v-i}{k-i}$. اگر یک $\text{LS}_\lambda(t, k, v)$ برای $\lambda = \frac{\binom{v-t}{k-t}}{N}$ موجود باشد، آنگاه N تعداد طرح‌های دو به دو متمایز مجموعهٔ بزرگ خواهد بود، یعنی $\text{D}_\lambda(t, k, v) = N$. همچنین برای حالتی

که $k = t + ۱$، این شرایط به این صورت ساده می‌شوند که λ باید بر

$$\lambda_* = \lambda(t, t+۱, v) = \gcd(v - t, \mathrm{lcm}\{۱, \ldots, t+۱\}),$$

بخشپذیر باشد[۳]. بنابراین وقتی $k = ۳$ و $t = ۲$ داریم:

$$\lambda_* = \lambda(۲, ۳, v) = \gcd(v - ۲, \mathrm{lcm}\{۱, ۲, ۳\}) = \gcd(v - ۲, ٦),$$

یعنی شرایط لازم برای وجود یک $(v, ۳, \lambda)$-۲ طرح این است که $\lambda_* | \lambda$ [13].

قضیهٔ ۳.۲.۴ [15] یک $\mathrm{LS}_{\lambda_*}(۲, ۳, v)$ موجود است اگر و فقط اگر $v \neq ۷$.

قضیهٔ ۴.۲.۴ برای هر $v \leq ۷$، حداقل یک $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید ساده وجود دارد.

اثبات. می‌دانیم اگر $\mathrm{LS}_{\lambda_*}(۲, ۳, v)$ موجود باشد، آنگاه تعداد طرح‌های مجموعهٔ بزرگ برابر است با $\mathrm{D}_{\lambda_*}(۲, ۳, v) = \frac{v-۲}{\lambda_*}$. مقدار λ_* و $\mathrm{D}_{\lambda_*}(۲, ۳, v)$ را برای هر v محاسبه می‌کنیم: (از هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۶ استفاده می‌کنیم)

$$\begin{aligned}
v \equiv ۰ (mod\ ٦) \quad & \Rightarrow v = ٦k \Rightarrow \lambda_* = \gcd(v - ۲, ٦) = \gcd(٦k - ۲, ٦) = ۲ \\
& \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲, ۳, v) = \tfrac{٦k-۲}{۲} = ۳k - ۱, \\
v \equiv ۱ (mod\ ٦) \quad & \Rightarrow v = ٦k + ۱ \Rightarrow \lambda_* = \gcd(v - ۲, ٦) = \gcd(٦k - ۱, ٦) = ۱ \\
& \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲, ۳, v) = \tfrac{٦k-۱}{۱} = ٦k - ۱, \\
v \equiv ۲ (mod\ ٦) \quad & \Rightarrow v = ٦k + ۲ \Rightarrow \lambda_* = \gcd(v - ۲, ٦) = \gcd(٦k, ٦) = ٦ \\
& \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲, ۳, v) = \tfrac{٦k}{٦} = k, \\
v \equiv ۳ (mod\ ٦) \quad & \Rightarrow v = ٦k + ۳ \Rightarrow \lambda_* = \gcd(v - ۲, ٦) = \gcd(٦k + ۱, ٦) = ۱ \\
& \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲, ۳, v) = \tfrac{٦k+۱}{۱} = ٦k + ۱, \\
v \equiv ۴ (mod\ ٦) \quad & \Rightarrow v = ٦k + ۴ \Rightarrow \lambda_* = \gcd(v - ۲, ٦) = \gcd(٦k + ۲, ٦) = ۲ \\
& \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲, ۳, v) = \tfrac{٦k+۲}{۲} = ۳k + ۱, \\
v \equiv ۵ (mod\ ٦) \quad & \Rightarrow v = ٦k + ۵ \Rightarrow \lambda_* = \gcd(v - ۲, ٦) = \gcd(٦k + ۳, ٦) = ۳ \\
& \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲, ۳, v) = \tfrac{٦k+۳}{۳} = ۲k + ۱.
\end{aligned}$$

[۳] gcd =Greatest Common Divisor lcm=Lowest Common Multiple

در بخش (۲.۳)، تنها $T[۳](۲,۳,۷)$ ترید ساده (با تقریب یکریختی) محاسبه شد. همچنین در فصل (۵) از همین پایان‌نامه تمام $T[۳](۲,۳,۸)$ تریدهای ساده محاسبه می‌شوند. جدول ۵-۴ نشان می‌دهد که حداقل یک $T[۳](۲,۳,۸)$ ترید ساده موجود است. بنابراین $v > ۸$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
۸ < v, v \equiv ۰ (mod\ ۶) &\Rightarrow v = ۶k, ۲ \leq k \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲,۳,v) = ۳k - ۱ \geq ۵,\\
۸ < v, v \equiv ۱ (mod\ ۶) &\Rightarrow v = ۶k+۱, ۲ \leq k \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲,۳,v) = ۶k - ۱ \geq ۱۱,\\
۸ < v, v \equiv ۲ (mod\ ۶) &\Rightarrow v = ۶k+۲, ۲ \leq k \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲,۳,v) = k \geq ۲,\\
۸ < v, v \equiv ۳ (mod\ ۶) &\Rightarrow v = ۶k+۳, ۱ \leq k \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲,۳,v) = ۶k + ۱ \geq ۷,\\
۸ < v, v \equiv ۴ (mod\ ۶) &\Rightarrow v = ۶k+۴, ۱ \leq k \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲,۳,v) = ۳k + ۱ \geq ۴,\\
۸ < v, v \equiv ۵ (mod\ ۶) &\Rightarrow v = ۶k+۵, ۱ \leq k \Rightarrow D_{\lambda_*}(۲,۳,v) = ۲k + ۱ \geq ۳.
\end{aligned}$$

طبق قضیهٔ ۳.۲.۴ می‌دانیم برای هر $v \neq ۷$، $LS_{\lambda_*}(۲,۳,v)$ موجود است. با استفاده از این قضیه و با توجه به محاسبات بالا ملاحظه می‌شود برای $v > ۸$، به جز حالت $v = ۶k+۲$، تعداد $(۳,v,\lambda_*)$-۲ طرح‌های دو به دو مجزا در مجموعهٔ بزرگ حداقل ۳ است ($D_{\lambda_*}(۲,۳,v) \geq ۳$). برای هر $v > ۸$ و $v \not\equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۶)$، کافی است سه طرح از مجموعهٔ بزرگ را انتخاب کنیم. این سه $(۳,v,\lambda_*)$-۲ طرح، تشکیل یک $T[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده می‌دهند. بنابراین برای هر $v > ۸$ که $v \not\equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۶)$، حداقل یک $T[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده موجود است. اما در حالتی که $v = ۶k + ۲$، چنانچه $k \geq ۳$، آنگاه $D_{\lambda_*}(۲,۳,v) = k \geq ۳$ و در این حالت نیز می‌توان سه طرح از مجموعهٔ بزرگ را انتخاب کرد و یک $T[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده ساخت. ولی اگر $v = ۶k + ۲$ و $k = ۲$، داریم $D_{\lambda_*}(۲,۳,v) = ۲$. بنابراین برای $v = ۱۴$ نمی‌توان از مجموعهٔ بزرگ برای ساختن یک $T[۳](۲,۳,۱۴)$ ترید ساده استفاده کرد. اما می‌توان از $T[۳](۲,۳,۷)$ ترید سادهٔ مشخص شده دربخش (۲.۳) استفاده کرده، یک $T[۳](۲,۳,۱۴)$ ترید ساده ساخت. به این ترتیب که $T[۳](۲,۳,۷)$ ترید سادهٔ T را یک بار روی مجموعهٔ $X = \{۱,\ldots,۷\}$ و یک بار روی مجموعهٔ $X' = \{۸,\ldots,۱۴\}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت دو ترید $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ و $T' = \{T'_۱, T'_۲, T'_۳\}$ حاصل می‌شوند. قرار می‌دهیم $X'' = \{۱,\ldots,۱۴\}$ و $T'' = \{T''_۱, T''_۲, T''_۳\} = \{T_۱ \cup T'_۱, T_۲ \cup T'_۲, T_۳ \cup T'_۳\}$. برای هر $x,y \in X''$،

سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $x,y \in X$: آنگاه زوج xy در $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ به تعداد برابر ظاهر شده است و از آنجا که $X \cap X' = \emptyset$، لذا xy در $T'_۱$، $T'_۲$ و $T'_۳$ اصلاً ظاهر نشده است. بنابراین xy در $T''_۱$، $T''_۲$ و $T''_۳$ نیز به تعداد مساوی ظاهر شده است.

۲) $x,y \in X'$: در این حالت نیز مشابه حالت (۱)، می‌توان نشان داد xy در $T''_۱$، $T''_۲$ و $T''_۳$ به تعداد مساوی ظاهر شده است.

۳) $x \in X, y \in X'$: دراین حالت زوج xy اصلاً در T'' ظاهر نشده است، زیرا T'' به گونه‌ای تعریف شده است که هر بلوک از آن یا متعلق به $P_k(X)$ است و یا متعلق به $P_k(X')$ و از آنجا که $X \cap X' = \emptyset$، لذا xy در T'' ظاهر نمی‌شود.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که T'' یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۱۴)$ ترید ساده است. ■

مثال ۴.۲.۱ $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۱۴)$ ترید سادهٔ به دست آمده از قضیهٔ ۴.۲.۴ به صورت زیر است: ($T'' = \{T''_۱, T''_۲, T''_۳\}$ و نمادهای E, D, C, B, A به ترتیب به جای اعداد ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ به کار رفته‌اند.)

$$T''_۱ = \{۱۲۳, ۱۶۷, ۲۴۷, ۲۵۶, ۳۴۶, ۳۵۷, ۸۹A, ۸DE, ۹BE, ۹CD, ABD, ACE\},$$

$$T''_۲ = \{۱۲۷, ۱۳۶, ۲۳۵, ۲۴۶, ۳۴۷, ۵۶۷, ۸۹E, ۸AD, ۹AC, ۹BD, ABE, CDE\},$$

$$T''_۳ = \{۱۲۶, ۱۳۷, ۲۳۴, ۲۵۷, ۳۵۶, ۴۶۷, ۸۹D, ۸AE, ۹AB, ۹CE, ACD, BDE\}.\triangle$$

۳.۴ تریدهای سادهٔ ماکسیمال $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$

قضیهٔ ۴.۲.۴ نشان داد که برای هر $v \leq ۷$، حداقل یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده موجود است. در ادامهٔ این فصل سعی داریم حجم $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ تریدهای سادهٔ ماکسیمال را برای حالت‌های

$(\text{mod } ۶)$ $v \equiv ۱, ۳, ۴$ و $(\text{mod } ۹)$ $v \equiv ۲$ $(v \geq ۷)$ به دست آوریم. اگر T یک $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید سادهٔ ماکسیمال باشد، آن را با $T_M(v)$ نمایش داده و حجم ترید سادهٔ ماکسیمال را با $\mathrm{vol}(T_M(v))$ نمایش می‌دهیم. (از این پس منظورمان از ترید، ترید ساده است.) مهم‌ترین ابزار این کار برای ما قضیهٔ ۳.۲.۴ خواهد بود. طبق این قضیه، برای هر $v \neq ۷$، یک مجموعهٔ بزرگ از طرح‌ها $(\mathrm{LS}_{\lambda_*}(۲, ۳, v))$ موجود است، که در آن برای هر طرح $\lambda_* = \gcd(v-۲, ۶)$. از طرفی در این حالت، تعداد طرح‌های مجموعهٔ بزرگ برابر $N = \gcd_{۰ \leq i \leq t}\binom{v-i}{k-i}$ خواهد بود.

لم ۲.۳.۴ اگر $v \equiv ۱ (\text{mod } ۶)$، آنگاه برای هر $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید ساده داریم:

$$\mathrm{vol}(T) \leq \tfrac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}.$$

اثبات. اگر X یک مجموعهٔ v عضوی باشد و $P_۲(X)$ را به عنوان ۲-طرح بدیهی در نظر بگیریم و $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید ساده باشد که در آن $v = ۶l + ۱$ $(l \geq ۰)$، آنگاه برای هر $x, y \in X$ رابطهٔ $\lambda_{P_۲(X)(xy)} = v - ۲ = ۶l - ۱$ برقرار است و اگر T^c را به صورت $T^c = P_۲(X) - (T_۱ \cup T_۲ \cup T_۳)$ تعریف کنیم، آنگاه داریم:

$$\forall x, y \in X \quad (\lambda_{T^c(xy)} = \lambda_{P_۲(X)(xy)} - ۳\lambda_{T_۱(xy)} = ۶l - ۱ - ۳\lambda_{T_۱(xy)} \equiv -۱ (\text{mod } ۳)),$$

و از آنجاکه $\lambda_{T^c(xy)} \geq ۰$، نتیجه می‌شود:

$$\forall x, y \in X \quad (۲ \leq \lambda_{T^c(xy)} \Rightarrow ۲ \leq ۶l - ۱ - ۳\lambda_{T_۱(xy)} \Rightarrow \lambda_{T_۱(xy)} \leq \tfrac{۶l-۳}{۳} = \tfrac{v-۴}{۳}).$$

از طرف دیگر، با توجه به ساده بودن ترید T داریم:

$$\mathrm{vol}(T) = |T| = \textstyle\sum_{xy \in P_۲(X)} \tfrac{۱}{۳}\lambda_{T_۱(xy)} \leq \tfrac{۱}{۳}\textstyle\sum_{xy \in P_۲(X)} \tfrac{v-۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \mathrm{vol}(T) \leq \tfrac{v-۴}{۹}|P_۲(X)| = \tfrac{v-۴}{۹}\binom{v}{۲} = \tfrac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}. \blacksquare$$

لم ۳.۳.۴ اگر $v \equiv ۱ (\text{mod } ۶)$ و $v > ۷$، آنگاه حداقل یک $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید ساده با حجم $\frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}$ وجود دارد.

اثبات. طبق قضیهٔ ۲.۲.۴ می‌دانیم هرگاه $v \equiv ۱ \pmod{۶}$ و $v \neq ۷$، آنگاه حداقل یک $\mathrm{LS}(۲,۳,v)$ موجود است. این مجموعهٔ بزرگ، اعضای $P_۳(X)$ را، که X یک مجموعهٔ v عضوی است، به دقیقاً $(v-۲)$ تا $(v,۳,۱)$-۲ طرح افراز می‌کند، که هر یک از این طرح‌ها دقیقاً شامل $\frac{\binom{v}{۳}}{v-۲}$ بلوک می‌شوند. از آنجا که $v = ۶l+۱$ $(l \geq ۲)$، لذا $v-۲ = ۶l-۱$، یعنی $۶l-۱$ طرح دو به دو مجزا داریم. حال، دو طرح را کنار گذاشته، $۶l-۳$ طرح را انتخاب می‌کنیم. این $۶l-۳$ طرح را به سه دسته $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$، که هر یک شامل $\frac{v-۴}{۳} = \frac{۶l-۳}{۳}$ طرح است، تقسیم می‌کنیم. از کنار هم قرار دادن بلوک‌های طرح‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$، به ترتیب به سه مجموعهٔ $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ می‌رسیم و داریم:

$$|T_۱| = |T_۲| = |T_۳| = \frac{v-۴}{۳} \times \frac{\binom{v}{۳}}{v-۲} = \frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸},$$

و از آنجا که $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ از اجتماع تعدادی $(v,۳,۱)$-۲ طرح دو به دو مجزا به دست آمده‌اند، لذا $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده با حجم $\frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}$ است.■

به عنوان نتیجهٔ مستقیمی از قضیهٔ ۲.۲.۳ و لم‌های ۲.۳.۴ و ۳.۳.۴، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۵.۳.۴ اگر $v \equiv ۱ \pmod{۶}$، آنگاه برای $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید سادهٔ ماکسیمال داریم:

۱) اگر $v = ۷$، آنگاه $\mathrm{vol}(T_M(۷)) = ۶$.

۲) اگر $v > ۷$، آنگاه $\mathrm{vol}(T_M(v)) = \frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}$.

لم ۴.۳.۴ اگر $v \equiv ۳ \pmod{۶}$، آنگاه برای هر $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده داریم:

$$\mathrm{vol}(T) \leq \frac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۸}.$$

اثبات. برای مجموعهٔ v عضوی X، اگر $P_۳(X)$ را به عنوان ۲-طرح بدیهی در نظر بگیریم و $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده باشد، که در آن $v = ۶l+۳$ $(l \geq ۱)$، آنگاه:

$$\forall x, y \in X \quad (\lambda_{P_۳(X)(xy)} = v-۲ = ۶l+۱),$$

و برای $T^c = P_۳(X) - (T_۱ \cup T_۲ \cup T_۳)$ داریم:

$$\forall x,y\in X\ \ (\lambda_{T^c(xy)}=\lambda_{P_۲(X)(xy)}-۳\lambda_{T_۱(xy)}=۶l+۱-۳\lambda_{T_۱(xy)}\equiv ۱(\mathrm{mod}\ ۳)).$$

از آنجا که $\lambda_{T^c(xy)}\geq ۰$، لذا $\lambda_{T^c(xy)}\geq ۱$ و داریم:

$$\forall x,y\in X\ \ (۱\leq ۶l+۱-۳\lambda_{T_۱(xy)}\Rightarrow \lambda_{T_۱(xy)}\leq \frac{۶l}{۳}=\frac{v-۳}{۳}),$$

و با توجه به ساده بودن ترید T داریم:

$$\mathrm{vol}(T)=|T|=\textstyle\sum_{xy\in P_۲(X)}\frac{۱}{۳}\lambda_{T_۱(xy)}\leq\frac{۱}{۳}\sum_{xy\in P_۲(X)}\frac{v-۳}{۳}$$
$$\Rightarrow \mathrm{vol}(T)\leq\tfrac{v-۳}{۹}|P_۲(X)|=\tfrac{v-۳}{۹}\tbinom{v}{۲}=\tfrac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۸}.\blacksquare$$

لم ۵.۳.۴ اگر $v\equiv ۳(\mathrm{mod}\ ۶)$ و $v\geq ۳$، آنگاه حداقل یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده با حجم $\frac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۸}$ وجود دارد.

اثبات. طبق قضیهٔ ۲.۲.۴ می‌دانیم هرگاه $v\equiv ۳(\mathrm{mod}\ ۶)$ و $v\geq ۳$، آنگاه حداقل یک $\mathrm{LS}(۲,۳,v)$ موجود است. با روندی مشابه آنچه در اثبات لم ۳.۳.۴ بیان شد، درمی‌یابیم این مجموعهٔ بزرگ شامل $(v-۲)=(۶l+۳)-۲$، ۲-طرح دوبه‌دو مجزا است، که هر یک از این طرح‌ها دقیقاً $\frac{\binom{v}{۳}}{v-۲}$ بلوک از $P_۳(X)$ را دارند. از این $۶l+۱$ طرح، یکی را کنار گذاشته، باقی آنها را به سه دستهٔ $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ تقسیم می‌کنیم، که از اجتماع طرح‌های موجود در هر یک از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$، به ترتیب سه مجموعهٔ $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ به‌دست می‌آیند و داریم:

$$|T_۱|=|T_۲|=|T_۳|=\tfrac{۶l}{۳}\times\tfrac{\binom{v}{۳}}{v-۲}=\tfrac{v-۳}{۳}\times\tfrac{\binom{v}{۳}}{v-۲}=\tfrac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۸}.$$

با بحثی مشابه بحث موجود در لم ۳.۳.۴، می‌توان نتیجه گرفت که $T=\{T_۱,T_۲,T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده با حجم $\frac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۸}$ است.$\blacksquare$

لم‌های ۴.۳.۴ و ۵.۳.۴، قضیهٔ زیر را نتیجه می‌دهند:

قضیهٔ ۶.۳.۴ اگر $v\equiv ۳(\mathrm{mod}\ ۶)$، برای $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید سادهٔ ماکسیمال، $T_M(v)$، داریم:

$$\mathrm{vol}(T_M(v))=\tfrac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۸}.$$

لم ۶.۳.۴ اگر $v \equiv ۴ \pmod{۶}$، آنگاه برای هر $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید ساده داریم:

$$\mathrm{vol}(T) \leq \frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}.$$

اثبات. فرض می‌کنیم $v = ۶l + ۴$ ($l \geq ۱$). همانند اثبات لم‌های ۲.۳.۴ و ۴.۳.۴ و با همان نمادگذاری‌ها داریم:

$$\forall x, y \in X \quad (\lambda_{P_۲(X)(xy)} = v - ۲ = ۶l + ۲),$$

$$\forall x, y \in X \quad (\lambda_{T^c(xy)} = \lambda_{P_۲(X)(xy)} - ۳\lambda_{T_۱(xy)} = ۶l + ۲ - ۳\lambda_{T_۱(xy)} \equiv ۲ \pmod{۳}),$$

$$\forall x, y \in X \quad (۰ \leq \lambda_{T^c(xy)} \Rightarrow ۲ \leq \lambda_{T^c(xy)} \Rightarrow \lambda_{T_۱(xy)} \leq \tfrac{۶l}{۳} = \tfrac{v-۴}{۳}).$$

و با توجه به ساده بودن ترید T داریم:

$$\mathrm{vol}(T) = |T| = \textstyle\sum_{xy \in P_۲(X)} \frac{۱}{۳}\lambda_{T_۱(xy)} \leq \frac{۱}{۳}\sum_{xy \in P_۲(X)} \frac{v-۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \mathrm{vol}(T) \leq \tfrac{v-۴}{۹}|P_۲(X)| = \tfrac{v-۴}{۹}\tbinom{v}{۲} = \tfrac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}. \blacksquare$$

لم ۷.۳.۴ اگر $v \equiv ۴ \pmod{۶}$ و $v \geq ۴$، آنگاه حداقل یک $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, v)$ ترید ساده با حجم $\frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}$ وجود دارد.

اثبات. قرار می‌دهیم $v = ۶l + ۴$ ($l \geq ۱$). به کمک قضیهٔ ۳.۲.۴ می‌دانیم که برای هر $v \neq ۷$، یک $\mathrm{LS}_{\lambda_*}(۲, ۳, v)$ موجود است، که در آن

$$\lambda_* = \gcd(v - ۲, ۶) = \gcd(۶l + ۲, ۶) = ۲.$$

بنابراین یک $\mathrm{LS}_۲(۲, ۳, v)$ موجود است، یعنی می‌توان $P_۲(X)$ را (که X یک مجموعهٔ v عضوی است) به تعدادی $(v, ۳, ۲)$-۲ طرح دوبه‌دو مجزا افراز کرد. تعداد طرح‌ها در این حالت برابر است با $N = \frac{v-۲}{۲} = \frac{۶l+۴-۲}{۲} = ۳l + ۱$. از این $۳l + ۱$ طرح، یکی را کنار گذاشته، باقیمانده را در سه مجموعهٔ هم‌اندازهٔ $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار می‌دهیم. حال اگر اجتماع طرح‌های موجود در هر یک از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را به ترتیب در سه مجموعهٔ $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ قرار دهیم، داریم:

$$|T_۱| = |T_۲| = |T_۳| = \frac{۳l}{۳} \times \frac{\binom{v}{۳}}{۳l+۱} = \frac{v-۴}{۶} \times \frac{\binom{v}{۳}}{\frac{v-۲}{۲}} = \frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}.$$

مشابه اثبات لم ۳.۳.۴، نتیجه می‌گیریم که $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده با حجم $\frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}$ است.■

مجدداً، از لم‌های ۶.۳.۴ و ۷.۳.۴، قضیهٔ زیر مستقیماً نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۷.۳.۴ اگر $v \equiv ۴ \pmod{۶}$، آنگاه حجم $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید سادهٔ ماکسیمال، $T_M(v)$، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\mathrm{vol}(T_M(v)) = \frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}.$$

قضیهٔ ۸.۳.۴ اگر $v \equiv ۲ \pmod{۹}$ و $v > ۰$، آنگاه حجم $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید سادهٔ ماکسیمال، $T_M(v)$، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\mathrm{vol}(T_M(v)) = \frac{\binom{v}{۳}}{۳} = \frac{v(v-۱)(v-۲)}{۱۸}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم $v = ۹l + ۲$ و برای l دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) اگر l زوج باشد، فرض می‌کنیم $l = ۲m$ و $m > ۰$. در این صورت $v = ۱۸m + ۲$ و داریم:

$$\lambda_* = \gcd(v-۲, ۶) = \gcd(۱۸m, ۶) = ۶.$$

بنابراین تعداد طرح‌ها در $\mathrm{LS}_{\lambda_*}(۲,۳,v)$ برابر است با:

$$N = \frac{v-۲}{۶} = \frac{۱۸m}{۶} = ۳m.$$

از آنجا که طبق قضیهٔ ۳.۲.۴ می‌دانیم حداقل یک $\mathrm{LS}_{\lambda_*}(۲,۳,v)$ موجود است، می‌توانیم این $۳m$ تا ۲-طرح را به سه دستهٔ مساوی $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ تقسیم کرده، از اجتماع طرح‌های هر دسته، به ترتیب، به سه مجموعهٔ $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ برسیم. با عنایت به اثبات لم ۳.۳.۴ درمی‌یابیم

که $T=\{T_۱,T_۲,T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده است که در آن:

$$\mathrm{vol}(T)=\frac{\binom{v}{۳}}{۳}=\frac{v(v-۱)(v-۲)}{۱۸},$$

و از آنجا که تمام بلوک‌های $P_۳(X)$ در T استفاده شده است، لذا T یک ترید سادهٔ ماکسیمال است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathrm{vol}(T_M(v))=\frac{\binom{v}{۳}}{۳}=\frac{v(v-۱)(v-۲)}{۱۸}.$$

۲) اگر l فرد باشد، فرض می‌کنیم $l=۲m+۱$ و $m\leq ۰$. در این صورت $v=۱۸m+۱۱$ و داریم:

$$\lambda_*=\gcd(v-۲,۶)=\gcd(۱۸m+۹,۶)=۳,$$
$$N=\frac{v-۲}{\lambda_*}=\frac{۱۸m+۹}{۳}=۶m+۳.$$

بنابراین در این حالت نیز تعداد ۲-طرح‌های موجود در $\mathrm{LS}_{\lambda_*}(۲,۳,v)$، مضربی از سه است و می‌توان مانند حالت قبل، کل بلوک‌های $P_۳(X)$ را به سه مجموعهٔ $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ افراز کرد، به طوری که $T=\{T_۱,T_۲,T_۳\}$ یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ ترید ساده باشد. ماکسیمال بودن ترید T نیز واضح است، لذا

$$\mathrm{vol}(T_M(v))=\frac{\binom{v}{۳}}{۳}=\frac{v(v-۱)(v-۲)}{۱۸}.\blacksquare$$

می‌توان قضایای این بخش را در جدول ۴-۲ و قضیهٔ زیر جمع‌بندی کرد:

قضیهٔ ۹.۳.۴ حجم $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ تریدهای سادهٔ ماکسیمال به صورت زیر است:

۱) اگر $v=۷$، آنگاه $\mathrm{vol}(T_M(۷))=۶$،

۲) اگر $v\equiv ۱ (\mathrm{mod}\ ۶)$ و $v>۷$، آنگاه $\mathrm{vol}(T_M(v))=\frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}$،

۳) اگر $v \equiv ۳ \pmod{۶}$ و $v > ۰$، آنگاه $\mathrm{vol}(T_M(v)) = \frac{v(v-۱)(v-۳)}{۱۸}$،

۴) اگر $v \equiv ۴ \pmod{۶}$ و $v > ۰$، آنگاه $\mathrm{vol}(T_M(v)) = \frac{v(v-۱)(v-۴)}{۱۸}$،

۵) اگر $v \equiv ۲ \pmod{۹}$ و $v > ۰$، آنگاه $\mathrm{vol}(T_M(v)) = \frac{\binom{v}{۳}}{۳} = \frac{v(v-۱)(v-۲)}{۱۸}$.

جدول ۴-۱: حجم $\mathrm{T}(۲,۳,v)$ تریدهای سادهٔ ماکسیمال

$\lvert\mathrm{found}(T)\rvert$	$\mathrm{vol}(T_M(v))$
$v \le ۵$	۰
$v \equiv ۰ \pmod{۴}$	$v(v+۱)(v-۴)/۱۲$
$v \equiv ۲ \pmod{۴}$	$v(v-۱)(v-۲)/۱۲$
$v = ۷$	۱۲
$v \equiv ۱,۳ \pmod{٦}, ۷ < v$	$v(v-۱)(v-۳)/۱۲$
$v \equiv ۵ \pmod{٦}, ۵ < v$	$(v(v-۱)(v-۳)-۱٦)/۱۲$

جدول ۴-۲: حجم $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v)$ تریدهای سادهٔ ماکسیمال

$\lvert\mathrm{found}(T)\rvert$	$\mathrm{vol}(T_M(v))$
$v \le ٦$	۰
$v = ۷$	٦
$v = ۸$	۱۲
$v \equiv ۱ \pmod{٦},\ ۷ < v$	$v(v-۱)(v-۴)/۱۸$
$v \equiv ۳ \pmod{٦},\ ۳ < v$	$v(v-۱)(v-۳)/۱۸$
$v \equiv ۴ \pmod{٦},\ ۴ < v$	$v(v-۱)(v-۴)/۱۸$
$v \equiv ۲ \pmod{۹}, ۲ < v$	$v(v-۱)(v-۲)/۱۸$

فصل ۵

رده‌بندی تریدهای ۳-پایهٔ ساده با اندازهٔ بنیان ۸

در این فصل قصد داریم تمامی $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ تریدهای ساده را با تقریب یکریختی محاسبه و دسته‌بندی کنیم. برای این کار از یک برنامهٔ کامپیوتری استفاده می‌کنیم که الگوریتم آن در ادامه می‌آید. با توجه به اینکه در این فصل، از پایهٔ استاندارد $\mathrm{T}(۲,۳,۸)$ تریدها استفاده شده است، پایهٔ مدول $\mathrm{T}(۲,۳,۸)$ تریدها را که به فرم ماتریسی

$$M^{۸}_{۲,۳} = \begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & I \\ \overline{M}^{۷}_{۱,۲} & ۰ \\ Q & \overline{M}^{۷}_{۲,۳} \end{pmatrix},$$

چیده شده است، در جدول ۵-۱ آورده‌ایم.

یک روش مستقیم برای محاسبهٔ همهٔ $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ تریدهای ساده، این است که ابتدا تمام ترکیبات خطی عناصر پایه، یعنی ستون‌های $M^{۸}_{۲,۳}$ را با ضرایب $۰,\pm۱$ با هم جمع کنیم (چون پیدا کردن تریدهای ساده مدنظر است) و بررسی کنیم که آیا حاصل یک ترید ساده است یا خیر. با این روش، تمام $\mathrm{T}[۲](۲,۳,۸)$ تریدهای ساده محاسبه می‌شوند. سپس می‌توان در گام بعدی، هر دو

تریدی را که یک ستون مشترک دارند، پیدا کرده و از کنار هم قرار دادن این دو ترید، به یک ترید سه پایه با اندازهٔ بنیان ۸، یعنی $\mathrm{T}[3](2,3,8)$ ترید دست یافت. به عبارت دیگر، اگر $T=\{T_1,T_2\}$ و $T'=\{T'_1,T'_2\}$ و $T_1=T'_1$، آنگاه $T''=\{T_1,T_2,T'_2\}$ یک $\mathrm{T}[3](2,3,8)$ ترید خواهد بود، که باید ساده بودن آن را بررسی کرد. پس از این مراحل، باید از بین همهٔ $\mathrm{T}[3](2,3,8)$ تریدهای به دست آمده، یک مجموعه از $\mathrm{T}[3](2,3,8)$ تریدهای غیریکریخت پیدا کرده و به عنوان حاصل نهایی معرفی کرد. اما از آنجا که پایهٔ مدول تریدها، $\mathbf{28}=\binom{8}{2}-\binom{8}{3}$ عضو دارد، محاسبهٔ تمام ترکیبات خطی ستون‌های پایه، نیازمند محاسبهٔ ضرایب $-1,+1,0$ برای تمام ستون‌ها، یعنی به تعداد 3^{28} ترکیب خطی خواهد بود که عددی بزرگ است.

با توجه به آنچه گفته شد، بهتر است از روش‌های غیرمستقیم، اما با پیچیدگی کمتر استفاده شود. الگوریتمی که در اینجا مورد استفاده قرار گرفته است، مشابه روشی است که در [2] آمده است. در واقع برای محاسبهٔ $\mathrm{T}(2,3,8)$ تریدها، از روش گفته شده در این مقاله استفاده شده است، با اندکی تغییر که بنا به نتایج مورد نیاز ما، روی آن الگوریتم اعمال شده است.

نکته: در این بخش، از آنجا که از روش‌های محاسباتی و کامپیوتر استفاده می‌کنیم، پایه‌های یک ترید را مرتب در نظر می‌گیریم و از نماد (T_1,T_2) یا (T_1,T_2,T_3) برای آنها استفاده می‌کنیم که مرتب است، یعنی:

$$((T_1,T_2)=(T'_1,T'_2))\Leftrightarrow(T_1=T'_1\wedge T_2=T'_2).$$

در این فصل منظور از ترید، ترید ساده است. همچنین برای هر $\mathrm{T}[N](t,k,v)$ ترید، فرض کرده‌ایم که $|\mathrm{found}(T)|=v$.

۱.۵ الگوریتم‌ها

۱.۵-۱ الگوریتم گسترش $\mathrm{T}(۱,۲,v')$ ترید مشتق

برای هر $\mathrm{T}(۱,۲,v')$ ترید سادهٔ T $(v' \leq ۷)$ روی مجموعهٔ $Y = \{۲,۳,\dots,v'+۱\}$، از الگوریتم زیر برای یافتن همهٔ $\mathrm{T}(۲,۳,۸)$ تریدهای ساده‌ای (روی $X = \{۱,\dots,۸\}$) که ترید مشتق آنها نسبت به نقطهٔ $x = ۱$ برابر ترید T است، استفاده می‌کنیم:

گام اول:

به تمام بلوک‌های T، عنصر $x = ۱$ اضافه می‌شود تا عناصر T، بلوک‌هایی از $P_۳(X)$ گردند. بدین ترتیب ضرایب ۱۴ ستون اول از ماتریس پایهٔ استاندارد $M^۸_{۲,۳}$ مشخص می‌گردد.

گام دوم:

به ازای هر بردار ۱۴ عضویِ $F = \{f_۱,\dots,f_{۱۴}\}$ از $\{-۱,\circ,۱\}$، که هر درایه از F نشان دهندهٔ ضریب یک ستون از ۱۴ ستون باقیماندهٔ ماتریس $M^۸_{۲,۳}$ است (یعنی برای $۳^{۱۴}$ بردار از ضرایب)، مقدار f_i را در ستون $(i+۱۴)$ اُم از ماتریس $M^۸_{۲,۳}$ ضرب کرده، همهٔ ۲۸ ستون ماتریس $M^۸_{۲,۳}$ را با هم جمع می‌کنیم تا یک بردار ۵۶ عضوی حاصل شود، که همان ترید حاصل است. سپس ساده بودن آن را بررسی می کنیم.

۱.۵-۲ الگوریتم محاسبهٔ $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ تریدهای سادهٔ غیریکریخت

در این بخش، الگوریتم مورد نظر به صورت گام به گام مطرح شده است.

گام اول:

محاسبهٔ تمام $\mathrm{T}[۳](۱,۲,v')$ تریدهای غیریکریخت $(v' \leq ۷)$ (مجموعهٔ این تریدها را E می‌نامیم). این کار به صورت دستی انجام شده و نتایج آن در جدول ۵-۲ آمده است.

گام دوم:

برای هر $\mathrm{T}[۳](۱,۲,v')$ ترید $(v' \leq ۷)$ متعلق به E، مانند $e = (e_۱, e_۲, e_۳)$، به کمک «الگوریتم گسترش ترید مشتق»، دو $\mathrm{T}(۱,۲,v')$ ترید $(e_۱, e_۲)$ و $(e_۱, e_۳)$ را گسترش داده، مجموعهٔ تریدهای گسترش یافته از آنها را به ترتیب $\mathcal{A}_2^{\mathrm{e}}$ و $\mathcal{A}_3^{\mathrm{e}}$ می‌نامیم و برای هر عضو از E مانند e، عناصر $\mathcal{A}_2^{\mathrm{e}}$ و $\mathcal{A}_3^{\mathrm{e}}$ را بر اساس حجم تریدها دسته بندی می‌کنیم.

گام سوم:

در هر ردهٔ حجم، به ازای هر عضو $R \in \mathcal{A}_2^{\mathrm{e}}$، تریدهایی از $\mathcal{A}_3^{\mathrm{e}}$ را می‌یابیم که ستون اول آنها با ستون اول R یکسان باشد. به عبارت دیگر، باید عناصری مانند $R = (R_۱, R_۲) \in \mathcal{A}_2^{\mathrm{e}}$ و $S = (S_۱, S_۲) \in \mathcal{A}_3^{\mathrm{e}}$ را بیابیم که $R_۱ = S_۱$. در این صورت $(R_۱, R_۲, S_۲)$، یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ ترید خواهد بود، که ساده بودن آن باید بررسی شود. مجموعهٔ تریدهای حاصل از این گام را E' می‌نامیم.

گام چهارم:

عناصر غیر یکریخت E' را می‌یابیم و در مجموعه‌ای به نام F قرار می‌دهیم. F همان مجموعهٔ مورد نظر، یعنی مجموعهٔ تمام $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ تریدهای سادهٔ غیریکریخت خواهد بود.

۲.۵ تحلیل الگوریتم

فرض کنید T یک $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ ترید سادهٔ دلخواه و $\partial_۱ T$ ترید مشتق آن نسبت به $x = ۱$ باشد. در این صورت $\partial_۱ T$ دقیقاً با یکی از اعضای مجموعهٔ E، مانند e یکریخت است. بنابراین جایگشت $\sigma \in S_{\{۲,\ldots,۸\}}$ موجود است به گونه ای که $e = \sigma(\partial_۱ T)$. $\sigma' \in S_۸$ را به صورت

$$\sigma'(x) = \begin{cases} ۱, & x = ۱; \\ \sigma(x), & x \neq ۱. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $T' = \sigma'(T)$، یک ترید یکریخت با T است. از طرفی اگر مشتق T' نسبت به ۱ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\partial_۱ T' = \partial_۱(\sigma'(T)) = \sigma(\partial_۱ T) = e.$$

بنابراین T' گسترشی از e است که با T یکریخت است.

همچنین اگر $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, ۸)$ ترید T ساده باشد، آنگاه $\partial_۱ T$ نیز ساده خواهد بود. زیرا، با برهان خلف، اگر $\partial_۱ T$ ساده نباشد، مثلاً اگر $xy \in P_۲(\{۲, \ldots, ۸\})$ دو بار در ترید $\partial_۱ T$ ظاهر شده باشد، آنگاه بوضوح بلوک $۱xy$ نیز دو بار در T ظاهر شده است که با ساده بودن T متناقض است. بنابراین $\partial_۱ T$ نیز ساده است.

از بحث‌های فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای یافتن تمام $\mathrm{T}[۳](۲, ۳, ۸)$ تریدهای ساده، کافی است تمام $\mathrm{T}[۳](۱, ۲, v')$ تریدهای سادهٔ غیریکریخت $(v' \leq ۷)$ را به دست آورده، گسترش دهیم.

۳.۵ نحوهٔ پیاده‌سازی

۳.۵-۱ گام اول

برای پیدا کردن تمام $\mathrm{T}[۳](۱, ۲, v')$ تریدهای مشتق $(v' \leq ۷)$ روی $X = \{۲, \ldots, ۸\}$، از روش زیر استفاده می‌کنیم:

اگر r_x نشان دهندهٔ تعداد رخدادهای x در یک پایهٔ ترید T باشد، آنگاه از آنجا که تریدهای مورد نظر ساده هستند و بلوک‌های ترید به صورت ab هستند، لذا هر عضو از $X = \{۲, \ldots, ۸\}$، در $\binom{۷-۱}{۲-۱} = ۶$ بلوک از $P_۲(X)$ ظاهر می‌شود، پس برای هر عضو $x \in X$، $۰ \leq r_x \leq \frac{۶}{۲} = ۲$. از طرفی، اگر T یک $\mathrm{T}[۳](۱, ۲, ۷)$ ترید ساده باشد، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{c} ۰ \leq \mathrm{vol}(T) \leq \frac{\binom{۷}{۲}}{۳} = ۷ \\ \sum_{x=۲}^{۸} r_x = ۲\mathrm{vol}(T) \end{array}\right\} \Rightarrow ۰ \leq \sum_{x=۲}^{۸} r_x \leq ۱۴.$$

تریدی با $\mathrm{vol}(T) = ۰$ ترید پوچ خواهد بود. همچنین $\mathrm{vol}(T) = ۱$ قابل قبول نیست، زیرا هیچ $\mathrm{T}[۳](۱,۲,۷)$ ترید ساده‌ای با $\mathrm{vol}(T) = ۱$ نمی‌توان ساخت. بنابراین فرض می‌کنیم

$$۲ \leq \mathrm{vol}(T) \leq ۷ \Rightarrow ۴ \leq \sum_{x=۲}^{۸} r_x \leq ۱۴.$$

حال برای یافتن تریدهای مورد نظر، همهٔ حالت‌های فوق را (با تقریب یکریختی) بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{x=۲}^{۸} r_x = ۴ \Rightarrow \begin{cases} r_۲ = r_۳ = ۲; \\ r_۲ = ۲, \quad r_۳ = r_۴ = ۱; \\ r_۲ = r_۳ = r_۴ = r_۵ = ۱. \qquad (I) \end{cases}$$

$$\sum_{x=۲}^{۸} r_x = ۶ \Rightarrow \begin{cases} r_۲ = r_۳ = r_۴ = ۲; \\ r_۲ = r_۳ = ۲, \quad r_۴ = r_۵ = ۱; \\ r_۲ = ۲, \quad r_۳ = r_۴ = r_۵ = r_۶ = ۱; \\ r_۲ = \cdots = r_۷ = ۱. \qquad (II) \end{cases}$$

$$\sum_{x=۲}^{۸} r_x = ۸ \Rightarrow \begin{cases} r_۲ = r_۳ = r_۴ = r_۵ = ۲; \\ r_۲ = r_۳ = r_۴ = ۲, \quad r_۵ = r_۶ = ۱; \\ r_۲ = r_۳ = ۲, \quad r_۴ = r_۵ = r_۶ = r_۷ = ۱; \\ r_۲ = ۲, \quad r_۳ = \cdots = r_۸ = ۱. \qquad (III) \end{cases}$$

$$\sum_{x=۲}^{۸} r_x = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} r_۲ = \cdots = r_۶ = ۲; \\ r_۲ = \cdots = r_۵ = ۲, \quad r_۶ = r_۷ = ۱; \\ r_۲ = r_۳ = r_۴ = ۲, \quad r_۵ = \cdots = r_۸ = ۱. \quad (IV) \end{cases}$$

$$\sum_{x=۲}^{۸} r_x = ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} r_۲ = \cdots = r_۷ = ۲; \\ r_۲ = \cdots = r_۶ = ۲, \quad r_۷ = r_۸ = ۱. \end{cases}$$

$$\sum_{x=۲}^{۸} r_x = ۱۴ \Rightarrow \quad r_۲ = \cdots = r_۸ = ۲. \quad (V)$$

نکته ۱: از آنجا که هدف محاسبهٔ $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ تریدهای ساده با تقریب یکریختی است، بنابراین در روابط فوق، جایگشت‌های عناصر $\{۲,\ldots,۸\}$ را در نظر نگرفته‌ایم.

نکته ۲: با توجه به اینکه $\mathrm{T}[۳](۱,۲,۷)$ تریدهای ساده را جستجو می‌کنیم، لذا اگر به ازای حداقل یک x داشته باشیم $r_x = ۲$، آنگاه حداقل ۷ نقطه برای ساختن ترید سادهٔ مورد نظر نیاز خواهیم داشت. بنابراین در محاسبات بالا، مواردی که در آنها $r_۲ = ۲$ اما کمتر از ۷ نقطه در ساخت ترید استفاده شده است از محاسبات حذف کرده‌ایم و باقی موارد را شماره‌گذاری و بررسی کرده‌ایم.

نکته ۳: در حالت $\sum_{x=۲}^{۸} r_x = ۱۲$ و $r_۲ = \cdots = r_۶ = ۲$ و $r_۷ = r_۸ = ۱$، چون اعداد ۲،...،۶ هر یک دو بار در هر پایهٔ ترید ظاهر می‌شوند، ۷ و ۸ باید در کل ترید حداقل ۵ بار ظاهر شوند، که این مساله با $r_۷ = r_۸ = ۱$ مغایر است. لذا این حالت نیز هرگز رخ نخواهد داد.

نکته ۴: توجه کنید که برای حالت‌های (I) و (II)، اندازهٔ بنیان تریدهای حاصل کمتر از ۷ است.

نتیجه: به کمک بحث بالا و با روش سعی و خطا، نتایج زیر برای تریدهای مشتق غیریکریخت حاصل شده است:

برای حالت (I)، تنها یک ترید موجود است:

$$T_۱ = \{۲۳, ۴۵\},\ \ T_۲ = \{۲۴, ۳۵\},\ \ T_۳ = \{۲۵, ۳۴\}.$$

برای حالت (II)، دو ترید غیریکریخت موجود است:

$$T_۱ = \{۲۳, ۴۶, ۵۷\},\ \ T_۲ = \{۲۴, ۳۷, ۵۶\},\ \ T_۳ = \{۲۵, ۳۶, ۴۷\};$$
$$T'_۱ = \{۲۳, ۴۵, ۶۷\},\ \ T'_۲ = \{۲۴, ۳۶, ۵۷\},\ \ T'_۳ = \{۲۵, ۳۷, ۴۶\}.$$

برای حالت (III)، سه ترید غیریکریخت موجود است:

$$T_۱ = \{۲۳, ۲۶, ۴۵, ۷۸\},\ \ T_۲ = \{۲۴, ۲۷, ۳۵, ۶۸\},\ \ T_۳ = \{۲۵, ۲۸, ۳۴, ۶۷\};$$
$$T'_۱ = \{۲۳, ۲۶, ۴۷, ۵۸\},\ \ T'_۲ = \{۲۴, ۲۷, ۳۵, ۶۸\},\ \ T'_۳ = \{۲۵, ۲۸, ۳۴, ۶۷\};$$
$$T''_۱ = \{۲۳, ۲۶, ۴۵, ۷۸\},\ \ T''_۲ = \{۲۴, ۲۷, ۳۵, ۶۸\},\ \ T''_۳ = \{۲۵, ۲۸, ۳۷, ۴۶\}.$$

برای حالت (IV)، دو ترید غیریکریخت موجود است:

$$T_{۱} = \{۲۳, ۲۶, ۳۷, ۴۵, ۴۸\},\ \ T_{۲} = \{۲۴, ۲۷, ۳۵, ۳۸, ۴۶\},\ \ T_{۳} = \{۲۵, ۲۸, ۳۴, ۳۶, ۴۷\};$$

$$T'_{۱} = \{۲۳, ۲۶, ۳۵, ۴۷, ۴۸\},\ \ T'_{۲} = \{۲۴, ۲۷, ۳۶, ۳۸, ۴۵\},\ \ T'_{۳} = \{۲۵, ۲۸, ۳۴, ۳۷, ۴۶\}.$$

و در نهایت برای حالت (V)، ۴ ترید غیریکریخت زیر موجود است:

$$\begin{cases} T_{۱} = \{۲۳, ۲۶, ۳۶, ۴۷, ۴۸, ۵۷, ۵۸\}, \\ T_{۲} = \{۲۴, ۲۷, ۳۴, ۳۵, ۵۶, ۶۸, ۷۸\}, \\ T_{۳} = \{۲۵, ۲۸, ۳۷, ۳۸, ۴۵, ۴۶, ۶۷\}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} T'_{۱} = \{۲۳, ۲۶, ۳۶, ۴۵, ۴۸, ۵۷, ۷۸\}, \\ T'_{۲} = \{۲۴, ۲۷, ۳۴, ۳۷, ۵۶, ۵۸, ۶۸\}, \\ T'_{۳} = \{۲۵, ۲۸, ۳۵, ۳۸, ۴۶, ۴۷, ۶۷\}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} T''_{۱} = \{۲۳, ۲۶, ۳۴, ۴۷, ۵۶, ۵۸, ۷۸\}, \\ T''_{۲} = \{۲۴, ۲۷, ۳۵, ۳۸, ۴۵, ۶۷, ۶۸\}, \\ T''_{۳} = \{۲۵, ۲۸, ۳۶, ۳۷, ۴۶, ۴۸, ۵۷\}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} T'''_{۱} = \{۲۳, ۲۶, ۳۴, ۴۵, ۵۸, ۶۷, ۷۸\}, \\ T'''_{۲} = \{۲۴, ۲۷, ۳۵, ۳۶, ۴۸, ۵۷, ۶۸\}, \\ T'''_{۳} = \{۲۵, ۲۸, ۳۷, ۳۸, ۴۶, ۴۷, ۵۶\}. \end{cases}$$

مجموعهٔ این ۱۲ ترید را E می‌نامیم.

۲-۳.۵ گام دوم: گسترش تریدهای مشتق

اکنون به شرح الگوریتم گسترش $\mathrm{T}(۱, ۲, v')$ ترید مشتق $(v' \leq ۷)$ به $\mathrm{T}(۲, ۳, ۸)$ ترید می‌پردازیم. اگر $M^{۸}_{۲,۳}$، پایهٔ استاندارد مدول $N^{۸}_{۲,۳}$ باشد و $R = (R_{۱}, R_{۲})$ یک $\mathrm{T}(۱, ۲, v')$ ترید ساده روی $Y = \{۲, \ldots, v' + ۱\}$ باشد، مراحل زیر را پیش رو داریم:

مرحلهٔ اول: به تمام بلوک‌های ترید $R = (R_{۱}, R_{۲})$ عنصر ۱ را اضافه می‌کنیم تا ترید R به $R' = (R'_{۱}, R'_{۲})$ تبدیل شود، به طوریکه $R'_{۱}, R'_{۲} \subseteq P_{۳}(X)$ $(X = \{۱, \ldots, ۸\})$. حال ضرایب

$14 = \binom{v-1}{k-1} - \binom{v-1}{k-1}$ ستون اول $M_{2,3}^{\lozenge}$، به کمک بلوک‌های ابتدایی موجود در $R' = (R'_1, R'_2)$ تعیین می‌شود.

مرحلهٔ دوم: با توجه به اینکه می‌خواهیم تریدهای حاصل ساده باشند، برای ۱۴ ستون باقی مانده از $M_{2,3}^{\lozenge}$، ضرایب $\pm 1, 0$ را در نظر گرفته، تمام 3^{14} حالت ممکن را بررسی می‌کنیم و در مورد ترید حاصل از هر بردار از ضرایب، ساده بودن ترید حاصل را بررسی می‌کنیم.

نکته: دقت کنید که با توجه به ساختارِ الگوریتمِ یافتن $\mathrm{T}[3](2,3,8)$ تریدها، در این مرحله نیازی به بررسی یکریختی تریدها نیست. به عبارت دیگر، این احتمال وجود دارد که دو $\mathrm{T}(2,3,8)$ ترید یکریخت، منجر به ساخت $\mathrm{T}[3](2,3,8)$ ترید غیریکریخت با سایر تریدها شوند.

برای هر $\mathrm{T}[3](1,2,v')$ ترید مشتق از مجموعهٔ E $(v' \leq 7)$، مانند $e = (e_1, e_2, e_3)$، یک بار (e_1, e_2) و یک بار (e_1, e_3) را گسترش داده و به ترتیب به دو مجموعهٔ $\mathcal{A}_2^{\mathrm{e}}$ و $\mathcal{A}_3^{\mathrm{e}}$ از $\mathrm{T}[3](2,3,8)$ تریدها می‌رسیم. حاصل عناصر هر یک از مجموعه‌های $\mathcal{A}_2^{\mathrm{e}}$ و $\mathcal{A}_3^{\mathrm{e}}$ را به صورت جداگانه، بر حسب حجم تریدها، تقسیم بندی می‌کنیم.

۳-۳.۵ گام سوم

در این مرحله برای هر $s \in \{\mathrm{vol}(T) | T \in N_{2,3}^{\lozenge}\}$، همهٔ تریدهای با حجم s از $\mathcal{A}_2^{\mathrm{e}}$ و نیز همهٔ تریدهای با حجم s از $\mathcal{A}_3^{\mathrm{e}}$ را در نظر می‌گیریم و عناصری از $\mathcal{A}_2^{\mathrm{e}}$ مانند $R = (R_1, R_2)$ و نیز عناصری از $\mathcal{A}_3^{\mathrm{e}}$ مانند $R' = (R'_1, R'_2)$ را می‌یابیم، به گونه‌ای که $R_1 = R'_1$. در این صورت از کنار هم قرار دادن پایه‌های این دو ترید، یعنی (R_1, R_2, R'_2)، به یک $\mathrm{T}[3](2,3,8)$ ترید می‌رسیم. حال می‌توانیم ساده بودن این ترید را بررسی کنیم و در صورت ساده بودن، آن را ذخیره کنیم. مجموعهٔ همهٔ زوج‌هایی را که در ستون اول مشترک بوده و از کنار هم قرار دادن پایه‌های آنها، یک ترید ساده به دست می‌آید، به ازای هر مقدار s ، E'_s می‌نامیم.

۴-۳.۵ گام چهارم

برای هر $s \in \{\mathrm{vol}(T) | T \in N^{۸}_{۲,۳}\}$، عناصر غیریکریخت E'_s را می‌یابیم، به این ترتیب که اولین عنصر ذخیره شده را در F_s قرار می‌دهیم. برای عناصر بعدی موجود در E'_s، مانند T، جایگشت‌های روی ۸ نقطه را بر T اعمال می‌کنیم، تا زمانی که ترید حاصل با یکی از تریدهای F_s برابر شود. در این صورت، این ترید در F_s قرار نمی‌گیرد. در غیر این صورت، اگر ترید مورد نظر توسط هیچ یک از جایگشت‌های روی ۸ نقطه، با یکی از اعضای F_s برابر نشد، آنگاه این ترید را نیز در F_s قرار می‌دهیم. این کار را تا زمانی که تمام عناصر E'_s مورد بررسی قرار گیرند، ادامه می‌دهیم. در انتها، قرار می‌دهیم $F = \bigcup_{s \in \{\mathrm{vol}(T) | T \in N^{۸}_{۲,۳}\}} F_s$.

۴.۵ نتایج

پس از یافتن $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v')$ تریدهای مشتق سادهٔ غیریکریختِ موجود در جدول ۵-۲ و اجرای الگوریتمِ گسترش ترید مشتق روی هر یک از آنها، به تعدادی $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ ترید ساده رسیدیم، که تعداد این تریدها در جدول ۵-۳ آمده است. همچنین در این جدول، برای هر $\mathrm{T}[۳](۲,۳,v')$ ترید مشتق $T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$، تعداد $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ تریدهای سادهٔ به دست آمده از گسترش $\{T_۱, T_۲\}$ و $\{T_۱, T_۳\}$ به طور جداگانه و نیز تعداد $\mathrm{T}[۳](۲,۳,۸)$ تریدهای حاصل از اجرای گام سوم الگوریتم روی آن، به تفکیک حجم ترید حاصل، آمده است. همان طور که از جدول مشخص است، نهایتاً ۵۶ ترید ۳-پایهٔ ساده به دست آمد. از این تعداد، ۸ ترید با $|\mathrm{found}(T)| = ۷$ و $\mathrm{vol}(T) = ۶$ بودند، که در فصل (۳) نشان دادیم چنین تریدی با تقریب یکریختی منحصر به فرد است. ۴۸ ترید باقی مانده دارای اندازهٔ بنیان ۸ هستند. در این بین نیز ۲ ترید با حجم ۸، ۶ ترید با حجم ۱۰ و ۴۰ ترید با حجم ۱۲ وجود دارد. تریدهای با حجم ۸ یکریخت هستند. تریدهای با حجم ۱۰ نیز یکریخت هستند و از ۴۰ تریدی که حجم ۱۲ دارند، در نهایت، ۵ ترید غیریکریخت

به دست آمده است.

قضیهٔ ۱.۴.۵ با تقریب یکریختی، تنها ۷ تا $T[3](2,3,8)$ ترید ساده با اندازهٔ بنیان ۸، به صورت زیر وجود دارد:

۱) تنها یک $T[3](2,3,8)$ ترید ساده با اندازهٔ بنیان ۸ و حجم ۸ موجود است.

۲) تنها یک $T[3](2,3,8)$ ترید ساده با اندازهٔ بنیان ۸ و حجم ۱۰ موجود است.

۳) پنج $T[3](2,3,8)$ ترید سادهٔ غیریکریخت با اندازهٔ بنیان ۸ و حجم ۱۲ موجود است.

تریدهای مورد نظر قضیهٔ ۱.۴.۵ در جدول ۵-۴ نمایش داده شده‌اند.

جدول ۵–۱: پایهٔ مدول $\mathrm{T}(۲, ۳, ۸)$ تریدها ($M^{۸}_{۲,۳}$) [2]

۱۲۳	۱																											
۱۲۴		۱																										
۱۲۵			۱																									
۱۲۶				۱																								
۱۲۷					۱																							
۱۳۴						۱																						
۱۳۵							۱																					
۱۳۶								۱																				
۱۳۷									۱																			
۱۴۵										۱																		
۱۴۶											۱																	
۱۴۷												۱																
۱۵۶													۱															
۱۵۷														۱														
۲۳۴															۱													
۲۳۵																۱												
۲۳۶																	۱											
۲۳۷																		۱										
۲۴۵																			۱									
۲۴۶																				۱								
۲۴۷																					۱							
۲۵۶																						۱						
۲۵۷																							۱					
۳۴۵																								۱				
۳۴۶																									۱			
۳۴۷																										۱		
۳۵۶																											۱	
۳۵۷																												۱
۱۲۸	–	–	–	–	–																							
۱۳۸	–					–	–	–	–																			
۱۴۸		–				–				–	–	–																
۱۵۸			–				–			–			–	–														
۱۶۷	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–														
۱۶۸	۱	۱	۱		۱	۱	۱		۱	۱		۱		۱														
۱۷۸	۱	۱	۱	۱		۱	۱	۱		۱	۱		۱															
۲۳۸	–														–	–	–	–										
۲۴۸		–													–				–	–	–							
۲۵۸			–													–			–			–	–					
۲۶۷	–	–	–	–	–										–	–	–	–	–	–	–	–	–					
۲۶۸	۱	۱	۱		۱										۱	۱		۱	۱		۱		۱					
۲۷۸	۱	۱	۱	۱											۱	۱	۱		۱	۱		۱						
۳۴۸						–									–									–	–	–		
۳۵۸							–									–								–			–	–
۳۶۷	–					–	–	–	–						–	–	–	–						–	–	–	–	–
۳۶۸	۱					۱	۱		۱						۱	۱		۱						۱		۱		۱
۳۷۸	۱					۱	۱	۱							۱	۱	۱							۱	۱		۱	
۴۵۶	–	–	–	–		–	–	–		–	–		–		–	–	–		–	–		–		–	–		–	
۴۵۷	–	–	–		–	–	–		–	–		–		–	–	–		–	–		–		–	–		–		–
۴۵۸	۲	۲	۲	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۴۶۷	۲	۱	۲	۱	۱	۱	۲	۱	۱	۱			۱	۱	۱	۲	۱	۱	۱			۱	۱	۱			۱	۱
۴۶۸	–		–		–		–		–					–		–		–					–					–
۴۷۸	–		–	–			–	–					–			–	–					–					–	
۵۶۷	۲	۲	۱	۱	۱	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱			۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱			۱	۱	۱		
۵۶۸	–	–			–	–			–			–			–			–			–					–		
۵۷۸	–	–		–		–		–			–				–		–			–					–			
۶۷۸	–	–	–			–	–			–					–	–			–					–				

منظور از '–'، ۱– بوده و درایه‌های خالی برابر صفر هستند.

جدول ۵-۲: $T[۳](۱, ۲, ۷)$ تریدهای سادهٔ غیریکریخت

ردیف	$\lvert \mathrm{found}(T)\rvert$	$\mathrm{vol}(T)$	$T = \{T_۱, T_۲, T_۳\}$
۱	۵	۲	{۲۳, ۴۵} {۲۴, ۳۵} {۲۵, ۳۴}
۲	۷	۳	{۲۳, ۴۶, ۵۷} {۲۴, ۳۷, ۵۶} {۲۵, ۳۶, ۴۷}
۳	۷	۳	{۲۳, ۴۵, ۶۷} {۲۴, ۳۶, ۵۷} {۲۵, ۳۷, ۴۶}
۴	۸	۴	{۲۳, ۲۶, ۴۵, ۷۸} {۲۴, ۲۷, ۳۵, ۶۸} {۲۵, ۲۸, ۳۴, ۶۷}
۵	۸	۴	{۲۳, ۲۶, ۴۷, ۵۸} {۲۴, ۲۷, ۳۵, ۶۸} {۲۵, ۲۸, ۳۴, ۶۷}
۶	۸	۴	{۲۳, ۲۶, ۴۵, ۷۸} {۲۴, ۲۷, ۳۵, ۶۸} {۲۵, ۲۸, ۳۷, ۴۶}
۷	۸	۵	{۲۳, ۲۶, ۳۷, ۴۵, ۴۸} {۲۴, ۲۷, ۳۵, ۳۸, ۴۶} {۲۵, ۲۸, ۳۴, ۳۶, ۴۷}
۸	۸	۵	{۲۳, ۲۶, ۳۵, ۴۷, ۴۸} {۲۴, ۲۷, ۳۶, ۳۸, ۴۵} {۲۵, ۲۸, ۳۴, ۳۷, ۴۶}
۹	۸	۷	{۲۳, ۲۶, ۳۶, ۴۷, ۴۸, ۵۷, ۵۸} {۲۴, ۲۷, ۳۴, ۳۵, ۵۶, ۶۸, ۷۸} {۲۵, ۲۸, ۳۷, ۳۸, ۴۵, ۴۶, ۶۷}
۱۰	۸	۷	{۲۳, ۲۶, ۳۶, ۴۵, ۴۸, ۵۷, ۷۸} {۲۴, ۲۷, ۳۴, ۳۷, ۵۶, ۵۸, ۶۸} {۲۵, ۲۸, ۳۵, ۳۸, ۴۶, ۴۷, ۶۷}
۱۱	۸	۷	{۲۳, ۲۶, ۳۴, ۴۷, ۵۶, ۵۸, ۷۸} {۲۴, ۲۷, ۳۵, ۳۸, ۴۵, ۶۷, ۶۸} {۲۵, ۲۸, ۳۶, ۳۷, ۴۶, ۴۸, ۵۷}
۱۲	۸	۷	{۲۳, ۲۶, ۳۴, ۴۵, ۵۸, ۶۷, ۷۸} {۲۴, ۲۷, ۳۵, ۳۶, ۴۸, ۵۷, ۶۸} {۲۵, ۲۸, ۳۷, ۳۸, ۴۶, ۴۷, ۵۶}

جدول ۵-۳: تعداد T(۲, ۳, ۸) تریدهای سادهٔ حاصل از گسترش تریدهای مشتق

شماره ترید (جدول ۵-۲)	ترید گسترش یافته با $\partial_1 T = (e_1, e_2)$	ترید گسترش یافته با $\partial_1 T = (e_1, e_3)$	$s = 6$ $v = 7$	$s = 8$ $v = 8$	$s = 10$ $v = 8$	$s = 12$ $v = 8$
۱	۱۸۱۲۰	۱۸۱۲۰	۶	۰	۰	۰
۲	۱۴۱۶۶	۱۴۱۶۶	۲	۰	۳	۲۳
۳	۱۴۱۶۶	۱۴۱۶۶	۰	۲	۱	۰
۴	۷۸۴۸	۷۸۴۸	۰	۰	۰	۱۱
۵	۷۸۵۸	۷۸۵۸	۰	۰	۰	۶
۶	۱۰۵۴۶	۱۰۵۴۶	۰	۰	۰	۰
۷	۱۰۵۴۶	۱۰۵۴۶	۰	۰	۰	۰
۸	۱۰۸۳۴	۱۰۸۳۴	۰	۰	۲	۰
۹	۴۰۷۳	۴۰۷۳	۰	۰	۰	۰
۱۰	۳۵۵۰	۳۵۵۰	۰	۰	۰	۰
۱۱	۴۴۹۸	۴۴۹۸	۰	۰	۰	۰
۱۲	۴۴۵۵	۴۴۵۵	۰	۰	۰	۰

جدول ۵-۴: T[۳](۲, ۳, ۸) تریدهای سادهٔ غیریکریخت

ردیف	vol(T)	T
۱	۸	{۱۲۳, ۱۴۵, ۲۵۷, ۳۴۶, ۱۶۷, ۲۴۸, ۳۷۸, ۵۶۸} {۱۲۴, ۱۳۶, ۱۵۷, ۲۳۷, ۲۵۸, ۳۴۸, ۴۵۶, ۶۷۸} {۱۲۵, ۱۳۷, ۱۴۶, ۲۳۴, ۲۷۸, ۳۶۸, ۴۵۸, ۵۶۷}
۲	۱۰	{۱۲۳, ۱۲۶, ۱۴۷, ۲۴۷, ۳۵۷, ۱۵۸, ۲۵۸, ۳۴۸, ۴۵۶, ۶۷۸} {۱۲۴, ۱۲۷, ۱۳۵, ۲۵۶, ۳۴۷, ۱۶۸, ۲۳۸, ۴۵۸, ۴۶۷, ۵۷۸} {۱۲۵, ۱۳۴, ۲۳۷, ۲۴۶, ۱۲۸, ۱۶۷, ۳۵۸, ۴۵۷, ۴۷۸, ۵۶۸}
۳	۱۲	{۱۲۳, ۱۴۶, ۱۵۷, ۲۴۵, ۲۴۷, ۲۵۶, ۳۴۷, ۳۵۶, ۲۳۸, ۳۶۷, ۴۶۸, ۵۷۸} {۱۲۴, ۱۳۷, ۱۵۶, ۲۳۵, ۲۳۷, ۲۴۶, ۳۴۶, ۲۵۸, ۳۶۸, ۴۵۷, ۴۷۸, ۵۶۷} {۱۲۵, ۱۳۶, ۱۴۷, ۲۳۴, ۲۳۶, ۲۵۷, ۳۵۷, ۲۴۸, ۳۷۸, ۴۵۶, ۴۶۷, ۵۶۸}
۴	۱۲	{۱۲۳, ۱۴۶, ۱۵۷, ۲۴۵, ۲۴۶, ۲۵۷, ۳۴۷, ۳۵۶, ۲۳۸, ۳۶۷, ۴۷۸, ۵۶۸} {۱۲۴, ۱۳۷, ۱۵۶, ۲۳۵, ۲۳۷, ۲۵۶, ۳۴۶, ۲۴۸, ۳۶۸, ۴۵۷, ۴۶۷, ۵۷۸} {۱۲۵, ۱۳۶, ۱۴۷, ۲۳۴, ۲۳۶, ۲۴۷, ۳۵۷, ۲۵۸, ۳۷۸, ۴۵۶, ۴۶۸, ۵۶۷}
۵	۱۲	{۱۲۳, ۱۴۶, ۱۵۷, ۲۳۷, ۲۴۵, ۲۵۶, ۳۴۷, ۳۵۶, ۲۴۸, ۳۶۸, ۴۶۷, ۵۷۸} {۱۲۴, ۱۳۷, ۱۵۶, ۲۳۵, ۲۴۶.۲۵۷, ۳۴۶, ۲۳۸, ۳۶۷, ۴۵۷, ۴۷۸, ۵۶۸} {۱۲۵, ۱۳۶, ۱۴۷, ۲۳۴, ۲۳۶, ۲۴۷, ۳۵۷, ۲۵۸, ۳۷۸, ۴۵۶, ۴۶۸, ۵۶۷}
۶	۱۲	{۱۲۳, ۱۴۶, ۱۵۷, ۲۳۷, ۲۴۵, ۲۴۶, ۳۴۷, ۳۵۶, ۲۵۸, ۳۶۸, ۴۷۸, ۵۶۷} {۱۲۴, ۱۳۷, ۱۵۶, ۲۳۵, ۲۴۷, ۲۵۶, ۳۴۶, ۲۳۸, ۳۶۷, ۴۵۷, ۴۶۸, ۵۷۸} {۱۲۵, ۱۳۶, ۱۴۷, ۲۳۴, ۲۳۶, ۲۵۷, ۳۵۷, ۲۴۸, ۳۷۸, ۴۵۶, ۴۶۷, ۵۶۸}
۷	۱۲	{۱۲۳, ۱۴۶, ۱۵۷, ۲۴۵, ۲۴۷, ۲۵۶, ۳۴۷, ۳۵۶, ۲۳۸, ۳۶۷, ۴۶۸, ۵۷۸} {۱۲۴, ۱۳۷, ۱۵۶, ۲۳۵, ۲۳۶, ۲۵۷, ۳۴۶, ۲۴۸, ۳۷۸, ۴۵۷, ۴۶۷, ۵۶۸} {۱۲۵, ۱۳۶, ۱۴۷, ۲۳۴, ۲۳۷, ۲۴۶, ۳۵۷, ۲۵۸, ۳۶۸, ۴۵۶, ۴۷۸, ۵۶۷}

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

آجودانی .... Ajoodani

بلوک .... Block

ابتدایی .... Starting

غیرابتدایی .... Non Starting

پایهٔ استاندارد .... Standard Basic

ترید .... Trade

N–پایه .... N–Legged

اشتاینری .... Steiner

، اندازهٔ بنیان .... Foundation Size of

، اندازهٔ محمل .... Support Size of

، بنیان .... Foundation of

پایه‌ای .... Basic

، پایهٔ .... Leg of

پوچ .... Void

، حجم .... Volume of
، دُم .... Tail of
ساده .... Simple
، ضرب .... Compounding
، طول .... Length of
، قوه .... Strength of
ماکسیمال .... Maximal
، محمل .... Support of
مشتق .... Drived
مینیمال .... Minimal
، یکریختی .... Isomorphism of

ترابی .... Torabi

خسروشاهی .... Khosrovshahi

رتبه کامل .... Full Rank

سیستم اشتاینری .... Steiner System

طرح .... Design
بدیهی .... Trivial
علامت‌دار .... Signed
، مجموعهٔ بزرگ .... Large Set of

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

Ajoodani .... آجودانی

Block .... بلوک

Non Starting .... غیرابتدایی

Starting .... ابتدایی

Design .... طرح

Isomorphism of .... یکریختی ،

Large Set of .... مجموعهٔ بزرگ ،

Signed .... علامت‌دار

Trivial .... بدیهی

Full Rank .... رتبه کامل

Graver-Jurkat .... گراور–یورکات

Hedayat .... هدایت

N–Legged .... N–پایه

Simple .... ساده

Steiner .... اشتاینری

Strength of .... ، قوه

Support of .... ، محمل

Support Size of .... ، اندازهٔ محمل

Tail of .... ، دُم

Void .... پوچ

Volume of .... ، حجم

فهرست الفبایی

کتابنامه (مراجع)

[1] S. Ajoodani-Namini and G. B. Khosrovshahi, *More on halving the complete designs*, Discrete Math. **135** (1994), 29–37.

[2] Z. E. Eslami, G. B. Khosrovshahi and B. Tayfeh-Rezaie, *On classification of* 2-(8,3) *and* 2-(9,3) *trades*, J. Combin. Math. Combin. Comput. **38** (2001), 231–242.

[3] A. D. Forbes, M. J. Grannell and T. S. Griggs, *Configurations and trades in steiner triple systems*, Australas. J. Combin. **29** (2004), 75–84.

[4] R. L. Graham, S. -Y. Li and W. -C. W. Li, *On the structure of t-designs*, SIAM J. Alg. Disc. Meth. **1** (1980), 8–14.

[5] A. S. Hedayat and G. B. Khosrovshahi, *Trades*, in: The CRC Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition (C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, eds.), Chapman Hall/CRC, Boca Raton, 2007, 644–648.

[6] A. S. Hedayat, G. B. Khosrovshahi and D. Majumdar, *A prospect for a general method of constructing t-designs*, Discrete Appl. Math. **42** (1993), 31–50.

[7] H. L. Hwang, *On the structure of (v,k,t) trades*, J. Statist. Plann. Inference **13** (1986), 179–191.

[8] G. B. Khosrovshahi and S. Ajoodani-Namini, *A new basis for trades* SIAM J. Discrete Math. **3** (1990), 364–372.

[9] G. B. Khosrovshahi, H. R. Maimani and R. Torabi, *Classification of* 2- (6,3) *and* 2-(7,3) *trades*, Australas. J. Combin. **19** (1999), 55–72.

[10] G. B. Khosrovshahi, H. R. Maimani and R. Torabi, *On trades: An update*, Discrete Appl. math. **95** (1999), 361–376.

[11] G. B. Khosrovshahi, D. Majumdar and M. Widel, *On the structure of basic trades*, J. Combin. Inform. System Sci. **17** (1992), 102–107.

[12] G. B. Khosrovshahi and Ch. Maysoori, *On the bases for trades*, Linear Algebra Appl. **226-228** (1995), 731–748.

[13] G. B. Khosrovshahi and R. Torabi, *Maximal trades*, Ars. Combin. **51** (1999), 211–223.

[14] J. G. Lefevre, *Maximal triangle trades with foundation* $5(mod\ 6)$ *- the final case*, Ars. Combin. **81** (2006), 325–342.

[15] L. Teirlinck, *Large sets of disjoint designs and related structures*, in: Contemporary Design Theory, A Collection of Surveys (J. H. Dinitz and D. R. Stinson, eds.), John Wiley, New York, 1992, 561–592.

Abstract

Let $t < k < v$ and N be positive integers and X be a v-set. An N-legged trade T, denoted by T$[N](t,k,v)$, based on the elements of $P_k(X)$ (set of all k-subsets based on X) is a set of nonempty pairwise-disjoint collections $\{T_1,\dots,T_N\}$, such that each element of $P_t(X)$ occurs in all of $T_1,\dots,T_N$ an equal number of times. Foundation size of a trade T is the number of elements from X wich appear in T.

In this thesis, we study N-legged trades. We define N-legged trades using an algebraic approach. Our main objective is to classify up to isomorphism all simple 3-legged trades with block size $k=$3 and strength $t=$2 and foundation size $v=$6,7,8. For $v=$6,7, this classification has been carried out through a theoretical investigation. It turns out that there is no trade for $v=$6 and for $v=$7, there exists exactly one solution. For $v=$8, we use a computaional approach. By designing and running an algorithm, we show that there are exactly 7 simple 3-legged trades for $v=$8, $k=$3, $t=$2. Finally we find the volume of a maxial simple 3-legged trade with $k=$3, $t=$2 and for any $v\equiv$1,3,4(mod 6) and $v\equiv$2(mod 9). Volume of maximal T[3](2,3,v) trades for $v\equiv$1,3,4(mod 6), respectively are $v(v-1)(v-4)/18$, $v(v-1)(v-3)/18$ and $v(v-1)(v-4)/18$. While $v\equiv$2(mod 9), volume of a maximal trade is equal to $v(v-1)(v-2)/18$.

Keywords: Trade, Simple Trade, N-Legged Trade, 3-Legged Trade, Maximal Trade, Incidence Matrix.

University of Tehran

College of Science

School of Mathematics, Statistics and Computer Sciences

Studies on 3-Legged Trades

By

Bahareh Esfahbod MirHosseinZadeh Sarabi

Under Supervision of

Prof. G. B. Khosrovshahi

A Thesis submitted to the Graduate Studies Office

in partial fulfilment of the requirements for

the degree of Master of Science in

Pure Mathematics

September 2007